Sudokujen ratkaisemisen kompleksisuudesta

Pro Gradu-tutkielma
Jami Puutio
2470434
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisällys

1 Johdanto

Sudoku on 2000-luvulla suosioon noussut päättelypeli, joka on neliön muotoinen yhdeksään laatikkoon jaettu ruudukko. Jokainen laatikko koostuu yhdeksästä ruudusta ja jokaiseen sudoku-ruudukon laatikkoon, riviin ja sarakkeeseen tulee saada luvut $1, 2, ..., 9$.

Sudokun juuret ylettyy aina 1700-luvulle matemaatikon Leonhard Eulerin kehittämiin latinalaisiin neliöihin. Latinalaisen neliön jokaiselle riville ja sarakkeelle tulee saada luvut $1, 2, ..., 9$. Täten sudokut ovatkin latinalaisten neliöiden erikoistapauksia. Sudokun kaltaisia ongelmia julkaistiin ensimmäisenä ranskalaisessa sanomalehdessä jo 1900-luvulla. Ensimmäiset sudokut kuitenkin julkaistiin vasta 1970-luvulla nimella Number Place, Dell Magazines lehdessä yhdysvalloissa, kun Howard Garnes lisäsi latinalaiseen neliöön laatikko vaatimuksen. [9]

Japanissa vuonna 1984 Nikoli-yhtiö julkaisi päättelypelin nimellä sudoku, joka sai nimensä japaninkielisestä sanonnasta "Suuji wa dokushin ni kagiru", joka tarkoittaa, että numeroiden tulee olla yksittäisiä. Sudokujen suosio räjähti japanissa, sillä japaninkieliset aakkoset eivät sovellu sanaristikoihin. Sudokut nousivat suosiossa muuallakin maailmassa 2000-luvulla, kun uusiseelantilainen Wayne Gould kehitti ensimmäisenä tietokoneohjelman, jonka avulla pystyttiin luomaan sudokuja nopeasti. [9]

Tässä työssä tutustutaan sudokun lisäksi shidokuun ja rodokuun, jotka omaavat sudokun säännöt, mutta ovat kooltaan pienempiä. Lasketaan kuinka monta sudokua, shidokua ja rodokua on olemassa ja kuinka moni niistä on ekvivalentisti erilaisia keskenään. Tätä varten tarvitsemme ryhmäteoriaa ja Burnsiden Lemmaa. Tutustutaan myös erilaisiin algoritmeihin, joiden avulla sudokuja voidaan ratkaista.

Sudokujen lukumääräksi saatiin $6670903752021072936960 \approx 6,671 \cdot 10^{21}$ kappaletta ja ekvivalentisti eroavia sudokuja saatiin 5472730538 kappaletta. Shidokujen lukumääräksi saatiin 288 kappaletta ja ekvivalentisti eroavia shidokuja saatiin 2 kappaletta. Rodokujen lukumääräksi saatiin 28200960 kappaletta.

2 Terminologiaa

Määritelmä 2.1. *Latinalainen neliö*, on $n^2 \times n^2$ ruudukko, jossa jokaiselle riville ja sarakkeelle tulee saada joukon $\{1, 2, ..., n^2\}$ alkiot täsmälleen kerran. [3]

Määritelmä 2.2. Kokoa $n^2 \times n^2$ olevan latinalaisen neliön *aste* on n.

Esimerkki 2.3. Astetta 3 oleva latinalainen neliö.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Määritelmä 2.4. *Sudoku* on astetta 3 oleva latinalainen neliö, jolla on lisäksi yhdeksän *laatikkoa* (eng. box), joiden sisälle pitää saada joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ alkiot täsmälleen kerran.

Sudokun rivit, sarakkeet ja laatikot numeroidaan vasemmasta yläreunasta alkaen numeroilla $1, 2, ..., 9$, jotta niihin on helpompi viitata. Esimerkiksi oikeassa yläreunassa olevaan laatikkoon viitataan merkinnällä L_3.

Määritelmä 2.5. Laatikot koostuvat kolmesta *minirivistä* ja kolmesta *minisarakkeesta*.

Määritelmä 2.6. Kolme vierekkäistä laatikkoa muodostaa *nipun* (eng.band) ja kolme alekkaista laatikkoa muodostaa *pinon* (eng.stack). Nippujen ja pinojen lukumäärä on sama, kuin sudokun aste.

Esimerkki 2.7. 9×9 Sudoku.

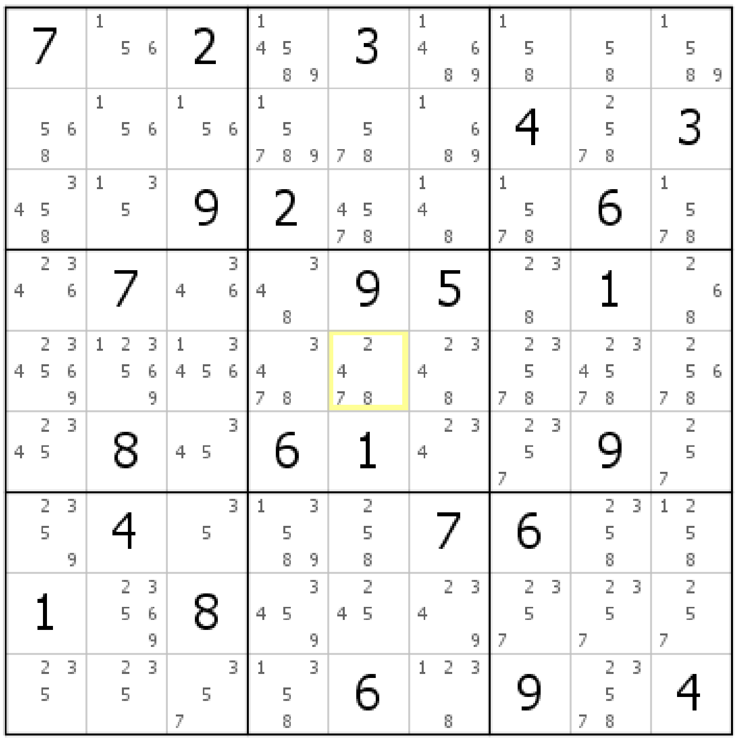
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Määritelmä 2.8. Sudoku koostuu 81:stä *solusta* (eng.cell), joihin kuhunkin tulee yksi alkio. Sudokun soluihin viitatessa ilmoitetaan solun rivin numero ja sarakkeen numero. Rivillä i ja sarakkeella j olevaan soluun viitataan merkinnällä $c(i, j)$.[4]

Määritelmä 2.9. Sudokussa jo valmiiksi annettuja numeroita kutsutaan *vihjeiksi*.

Määritelmä 2.10. Sudokun soluun varmasti tulevaa numeroa kutsutaan *pakolliseksi numeroksi*. Mikäli ei tiedetä, mikä numero soluun tulee, niin silloin sillä on useampi *kandidaatti*, eli *mahdollinen numero*. Solun kandidaatit voidaan merkitä soluun pienillä numeroilla

Esimerkki 2.11. Sudoku, jonka soluihin on merkitty kaikki kandidaatit.



3 Sudokusymmetriaa

Määritelmä 3.1. Kaksi sudokua ovat *ekvivalentteja*, jos toinen sudokuista voidaan muuttaa toiseksi käyttämällä jotakin määritelmän 3.2 mukaista symmetriaa tai symmetrioiden yhdistelmää.

Määritelmä 3.2. Seuraavia toimintoja kutsutaan sudokun *symmetrioiksi.* Symmetriat jaetaan seitsemään erilliseen kategoriaan. Jokaisen toiminnon jälkeen, jokaisessa rivissä, sarakkeessa ja laatikossa on yhä numerot $1, 2, ..., 9$ täsmälleen kerran.

1. Numeroiden vaihtaminen toisikseen,

2. Pinojen paikkojen vaihtaminen,

3, Nippujen paikkojen vaihtaminen,

4. Pinon sarakkeiden paikkojen vaihtaminen,

5. Nipun rivien paikkojen vaihtaminen,

6. Mikä tahansa kierto,

7. Mikä tahansa heijastus sudokon jonkin akselin suhteen.

Ratkaistusta sudokusta saadaan ekvivalentteja sudokuja vaihtamalla sudokun numeroita toisikseen. Tätä kutsutaan uudelleen numeroinniksi. Esimerkiksi vaihtamalla kaikkien numeroiden 1 ja 5 paikkaa saadaan aikaiseksi uusi sudoku. Uudelleen numerointia voidaan jatkaa kunnes kaikki numerot on uudelleen numeroitu. Koska sudokussa on 9 eri numeroa, niin tehtäessä uudelleen numerointia ensimmäinen numero voidaan muuttaa 8 eri numeroksi tai se voidaan pitää samana. Tällöin ensimmäisellä numerolla on 9 eri mahdollista vaihtoehtoa. Toisella numerolla on enää 8 eri vaihtoehtoa joista valita ja vastaavasti kolmannella numerolla on enää 7 eri vaihtoehtoa. Yhdestä sudokusta saadaan siis uudelleen numeroimalla yhteensä $9! = 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 1 = 362880$ ekvivalenttia sudokua (mukaan on laskettu myös alkuperäinen sudoku).

Esimerkki 3.3. Pinojen, pinon sarakkeiden sekä nippujen ja nipun rivien paikkojen vaihtamisella saadaan aikaiseksi ekvivalentteja sudokuja. Aloitetaan alla olevalla sudokulla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

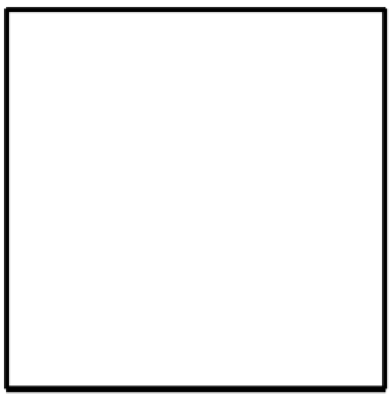
Vaihtamalla sarakkeiden 1 ja 2 sekä 5 ja 6 paikkoja keskenään saadan aikaiseksi alla oleva ekvivalentti sudoku.

2	1	3	4	6	5	7	8	9
5	4	6	7	9	8	1	2	3
8	7	9	1	3	2	4	5	6
3	2	4	5	7	6	8	9	1
6	5	7	8	1	9	2	3	4
9	8	1	2	4	3	5	6	7
4	3	5	6	8	7	9	1	2
7	6	8	9	2	1	3	4	5
1	9	2	3	5	4	6	7	8

Vaihtamalla vielä toisen ja kolmannen nipun paikkaa saadaan aikaiseksi alla oleva sudoku, joka on ekvivalentti alkuperäisen sudokun kanssa.

2	1	3	4	6	5	7	8	9
5	4	6	7	9	8	1	2	3
8	7	9	1	3	2	4	5	6
4	3	5	6	8	7	9	1	2
7	6	8	9	2	1	3	4	5
1	9	2	3	5	4	6	7	8
3	2	4	5	7	6	8	9	1
6	5	7	8	1	9	2	3	4
9	8	1	2	4	3	5	6	7

Sudokun kierto- ja heijastus-operaatiot voidaan ajatella vastaavan neliön symmetrioiksi, sillä neliölle voidaan tehdä samanlaisia kierto- ja heijastus-operaatioita, niin että se pysyy muuttumattomana. Alla olevalla neliöllä on kahdeksan erilaista symmetriaa.[15]



1. rot_0 : kierretään neliötä 0 astetta,

2. rot_1 : kierretään neliötä 90 astetta myötäpäivään,

3, rot_2 : kierretään neliötä 180 astetta myötäpäivään,

4. rot_3 : kierretään neliötä 90 astetta vastapäivään,

5. ref_1 : heijastus vaaka-akselin suhteen,

6. ref_2 : heijastus pystyakselin suhteen,

7. ref_3 : heijastus vasemman yläkulman ja oikean alakulman kautta kulkevan diagonaaliakselin suhteen,

8. ref_4 : heijastus oikean yläkulman ja vasemman alakulman kautta kulkevan diagonaaliakselin suhteen.

Huomataan, että tekemällä rot_1 ja sitten ref_2 päädytään samaan lopputulokseen kuin tekemällä ref_3. Vastaavasti voidaan valita mitkä tahansa kaksi symmetriaa ja tekemällä ensin toisen niistä ja sitten toisen päädytään aina samaan tilanteeseen kuin jollain toisella listan symmetrialla.

Määritelmä 3.4. Olkoon G kierto- ja heijastussymmetriaoperaatioiden joukko. Symmetriaoperaatiot muodostavat ryhmän G mikäli seuraavat kolme ehtoa toteutuvat:

1. Jos ϕ ja $\sigma \in G$, niin $\phi \circ \sigma \in G$.

2. On olemassa identiteettioperaatio $id \in G$, jolle $\phi \circ id = id \circ \phi = \phi$ kaikille $\phi \in G$.

3. Jos $\phi \in G$, niin $\phi^{-1} \in G$.

Lause 3.5. *Neliön kierto- ja heijastussymmetriaoperaatioiden joukko G muodostaa ryhmän G.*

Todistus. Tarkistetaan määritelmän 3.4 mukaiset vaatimukset.

1. Ryhmätaulusta helposti nähdään, että jos ϕ ja $\sigma \in G$, niin $\phi \circ \sigma \in G$.

$\circ$	rot_0	rot_1	rot_2	rot_3	ref_1	ref_2	ref_3	ref_4
rot_0	rot_0	rot_1	rot_2	rot_3	ref_1	ref_2	ref_3	ref_4
rot_1	rot_1	rot_2	rot_3	rot_0	ref_3	ref_4	ref_2	ref_1
rot_2	rot_2	rot_3	rot_0	rot_1	ref_2	ref_1	ref_4	ref_3
rot_3	rot_3	rot_0	rot_1	rot_2	ref_4	ref_3	ref_1	ref_2
ref_1	ref_1	ref_3	ref_2	ref_4	rot_0	rot_1	rot_2	rot_3
ref_2	ref_2	ref_4	ref_1	ref_3	rot_3	rot_0	rot_1	rot_2
ref_3	ref_3	ref_2	ref_4	ref_1	rot_2	rot_3	rot_0	rot_1
ref_4	ref_4	ref_1	ref_3	ref_2	rot_1	rot_2	rot_3	rot_0

2. Identiteettioperaatio $id = rot_0 \in G$.

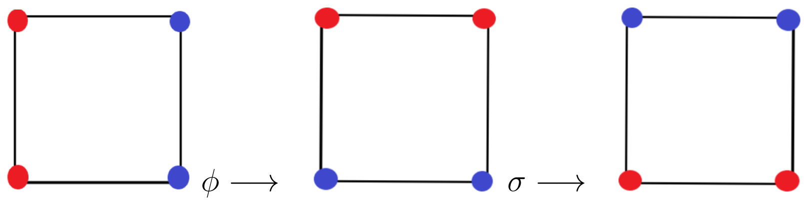
3. Jokaiselle operaatiolle löytyy joukosta G käänteisoperaatio :

$$rot_1 \circ rot_3 = rot_0,$$
$$rot_2 \circ rot_2 = rot_0,$$
$$ref_1 \circ ref_1 = rot_0,$$
$$ref_2 \circ ref_2 = rot_0,$$
$$ref_3 \circ ref_3 = rot_0,$$
$$ref_4 \circ ref_4 = rot_0.$$

□

Olkoon G heijastus- ja kiertosymmetrioiden muodostama ryhmä neliölle, jonka kärkipisteet ovat väritetty joko punaisella tai sinisellä värillä. Jos $\phi \in G$, niin ϕ on symmetriaoperaatio, joka vaikuttaa neliön väritykseen. Jos c on neliön väritys, niin $\phi(c)$ on neliön väritys sen jälkeen kun operaatio ϕ on suoritettu. Sanotaan, että G vaikuttaa (eng. acts on) erilaisten väritysten joukkoon C.[18]

Esimerkki 3.6. Olkoon symmetriaoperaatio ϕ 90 asteen kierto myötäpäivään ja symmetriaoperaatio σ heijastus vaaka-akselin suhteen. Tehdään operaatiot ϕ ja σ alla olevalle neliölle.



Jos väritykseen c vaikutetaan kaikilla ryhmän G symmetriaoperaatioilla, niin saadaan aikaiseksi kaikki sellaiset väritykset, joita pidetään värityksen c kanssa ekvivalentteina. Merkinnällä $c_1 \sim c_2$ tarkoitetaan, että väritykset c_1 ja c_2 ovat keskenään ekvivalentteja.

Määritelmä 3.7. Keskenään ekvivalentit väritykset muodostavat joukon jota kutsutaan *radaksi* (eng. orbit). Ratojen lukumäärä on sama kuin toisistaan ekvivalentisti eroavien väritysten lukumäärä. Sudokun tapauksessa ratojen lukumäärä on yhtä suuri kuin toisistaan eroavien sudokujen lukumäärä.[18]

Selvitetään neliölle, jonka kulmat ovat väritetty joko sinisellä tai punaisella värillä, erilaisten ratojen lukumäärä Burnsiden lemman avulla. Burnsiden lemmaa varten tarvitsemme kuitenkin vielä useamman lemman apua.

Olkoon c neliön väritys ja $[c]$ on rata, johon kuuluu kaikki värityksen c kanssa ekvivalentit väritykset. Olkoon $G(c)$ symmetriaoperaatioiden joukko, jotka kiinnittävät värityksen c, eli sellaiset operaatiot, joille $\phi(c) = c$.

Lause 3.8. *Joukko $G(c)$ muodostaa symmetriaoperaatioiden ryhmän.*

Todistus. Tarkistetaan määritelmän 3.4 mukaiset vaatimukset.

1. Jos ϕ, σ molemmat kiinnittävät värityksen c, niin $\phi(\sigma(c)) = \phi(c) = c$, eli $\phi \circ \sigma$ kiinnittää värityksen c ja siten $\phi \circ \sigma \in G(c)$.

2. Identiteettioperaatio rot_0 kiinnittää kaikki väritykset, joten $rot_0 \in G(c)$.

3. Jos $\phi(c) = c$, niin $\phi^{-1}(c) = \phi^{-1}(\phi(c)) = rot_0(c) = c$, jolloin käänteisoperaatio $\phi^{-1} \in G(c)$.

□

Seuraus 3.9. *Ryhmä $G(c)$ on ryhmän G aliryhmä.*

Lemma 3.10. *Nyt*

$$|G| = |[c]| \cdot |G(c)|.$$

Todistus. Olkoon ϕ ja $\sigma \in G$ ja määritellään relaatio $(\sim)$ siten, että $\phi \sim \sigma$, jos $\sigma^{-1} \circ \phi \in G(c)$. Osoitetaan, että relaatio $(\sim)$ on ekvivalenssirelaatio.

1. Nyt $\sigma^{-1} \circ \sigma = id \in G(c)$. Näin ollen $\sigma \sim \sigma$, jolloin relaatio on reflek-

siivinen.

2. Jos $\phi \sim \sigma$, niin $\sigma^{-1} \circ \phi \in G(c)$. Tällöin $(\sigma^{-1} \circ \phi)^{-1} \in G(c)$ ja $(\sigma^{-1} \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \sigma \in G(c)$, joten $\sigma \sim \phi$ ja relaatio on symmetrinen.

3. Jos $\phi \sim \sigma$ ja $\sigma \sim \tau$, niin silloin $\sigma^{-1} \circ \phi \in G(c)$ ja $\tau^{-1} \circ \sigma \in G(c)$, joten $(\tau^{-1} \circ \sigma) \circ (\sigma^{-1} \circ \phi) \in G(c)$. Koska $(\tau^{-1} \circ \sigma) \circ (\sigma^{-1} \circ \phi) = \tau^{-1} \circ \phi$ eli $\phi \sim \tau$, niin relaatio on transitiivinen.

Symmetriaoperaation $\phi \in G$ muodostama *ekvivalenssiluokka*

$$\begin{aligned}
[\phi] &= \{\sigma \in G \mid \sigma \sim \phi\} \\
&= \{\sigma \in G \mid \phi^{-1} \circ \sigma \in G(c)\} \\
&= \{\sigma \in G \mid \sigma \in \phi G(c)\} \\
&= \phi G(c).
\end{aligned}$$

Jokainen ekvivalenssi luokka on yhtä suuri kuin $G(c)$, sillä äärellisen ryhmän sivuluokille pätee

$$|[\phi]| = |\phi G(c)| = |G(c)|.$$

Lopuksi osoitetaan, että toisistaan eroavien ekvivalenssiluokkien lukumäärä on $|[c]|$. Olkoon ekvivalenssiluokkien joukko E. Määritellään kuvaus $g : [c] \to E$ ja osoitetaan, että g on bijektio. Olkoon $d \in [c]$, jolloin $d = \sigma(c)$, jollekin $\sigma \in G$.

Määritellään tällöin kuvaus g seuraavasti: $g(d) = [\sigma]$.

Näytetään ensin, että g on hyvin määritelty. Jos $d = \sigma_1(c) = \sigma_2(c)$, niin $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1(c) = c$, joten $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ja $[\sigma_1] = [\sigma_2]$. Näin ollen g on hyvin määritelty.

Seuraavaksi, olkoon $g(d_1) = g(d_2)$. Tällöin jos $d_1 = \sigma_1(c)$ ja $d_2 = \sigma_2(c)$, niin $[\sigma_1] = [\sigma_2]$ eli $\sigma_1 \sim \sigma_2$, jolloinka $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 \in G(c)$ eli $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1(c) = c$ ja siten $\sigma_1(c) = \sigma_2(c)$ ja $d_1 = d_2$. Täten g on injektio.

Osoitetaan vielä, että kuvaus on surjektio. Olkoon nyt $[\sigma] \in E$. Tällöin $\sigma(c) = d \in C$ ja $d \in [c]$. Tällöin $g(d) = [\sigma]$. Täten g on surjektio.

Näin ollen

$$|[c]| = |E| = \frac{|G|}{|G(c)|}$$

ja siten

$$|G(c)| \cdot |[c]| = |G|.$$

□

Lemma 3.11. *Jos väritykset c ja d ovat ekvivalentit, niin $|G(c)| = |G(d)|$.*

Todistus. Kun väritykset c ja d ovat ekvivalentit, niin $[c] = [d]$, eli

$$\frac{|G|}{|G(c)|} = |[c]| = |[d]| = \frac{|G|}{|G(d)|}$$

eli

$$|G(c)| = |G(d)|.$$

□

Määritelmä 3.12. Symmetriaoperaatioiden ryhmä G vaikuttaa neliön väritykseen. Tällöin väritykset $c \in C$, joille $\sigma(c) = c$ muodostavat joukon $fix(\sigma)$.

Lause 3.13 (*Burnsiden Lemma*)**.** *Jos G vaikuttaa kuvion väritykseen, niin erilaisten väritysten lukumäärä on*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |fix(\sigma)|.$$

Todistus. Olkoon C kaikkien väritysten muodostama joukko, ja olkoon Λ ratojen joukko. Olkoon lisäksi $c_1, c_2, ..., c_k$ lista värityksistä, jotka kuuluvat kukin omaan rataan $[c_1], [c_2], ..., [c_k]$. Lasketaan summa $\sum_{c \in C} |G(c)|$.

$$\sum_{c \in C} |G(c)| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{c \in [c_i]} |G(c)|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{c \in [c_i]} |G(c_i)|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{c \in [c_i]} \frac{|G|}{|[c_i]|}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |[c_i]| \frac{|G|}{|[c_i]|}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |G| = |G| \sum_{i=1}^{k} 1$$
$$= |G|k = |G||\Lambda|.$$

Näin ollen

$$|\Lambda| = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C} |G(c)|.$$

Tätä hieman muokkaamalla saadaan

$$\sum_{c \in C} |G(c)| = \sum_{c \in C} \sum_{\sigma \in G(c)} 1$$

$$= \sum_{\sigma \in G} \sum_{c \in fix(\sigma)} 1$$

$$= \sum_{\sigma \in G} |fix(\sigma)|.$$

Täten siis

$$|\Lambda| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |fix(\sigma)|.$$

□

Burnsiden lemman nojalla, väritykseltään ekvivalentisti erilaisten neliöiden lukumäärä $|\Lambda|$ saadaan selville laskemalla jokaiselle symmetrialle muuttumattomina pysyvät väritykset $|fix(\sigma)|$, laskemalla näiden summa $\sum_{\sigma \in G} |fix(\sigma|$ ja jakamalla se symmetrioiden lukumäärällä $|G|$. Neliön tapauksessa, jossa kulmat ovat väritetty joko sinisellä tai punaisella saadaan $2^4 = 16$ väritettyä neliötä. Ei kuitenkaan tiedetä kuinka moni näistä on ekvivalentteja keskenään ennenkuin tutkitaan neliön symmetrioita;

rot_0 : Kaikki 16 väritystä pysyy muuttumattomana, kun neliölle tehdään 0 asteen kierto.

rot_1 : Vain 2 väritystä pysyy muuttumattomana, kun neliölle tehdään 90 asteen kierto myötäpäivään. Kaikkien kulmien pitää olla joko sinisiä tai punaisia, jotta neliö on väritykseltään sama kierron jälkeen.

rot_2 : 4 väritystä pysyy muuttumattomana, kun neliölle tehdään 180 asteen kierto. Vastakkaisten kulmien pitää olla saman väriset keskenään.

rot_3 : Samalla tavalla kuin rot_1, 2 väritystä pysyy muuttumattomana.

ref_1 : 4 väritystä pysyy muuttumattomana, ylä- ja alareunan pitää olla saman väriset.

ref_2 : 4 väritystä pysyy muuttumattomana, vasemman ja oikean reunan pitää olla saman väriset.

ref_3 : 8 väritystä pysyy muuttumattomana, oikean yläkulman ja vasemman alakulman pitää olla saman väriset.

ref_4 : 8 väritystä pysyy muuttumattomana, vasemman yläkulman ja oikean alakulman pitää olla saman väriset.

Lasketaan eri symmetrioiden avulla muuttumattomina pysyneiden väritysten summa ja jaetaan se symmetrioiden lukumäärällä, eli lasketaan muuttumattomina pysyneiden väritysten keskiarvo:

$$\frac{16+2+4+2+4+4+8+8}{8} = \frac{48}{8} = 6.$$

Burnsiden lemma kertoo, että 16 värityksestä toisistaan ekvivalenttisesti eroavia on 6 kappaletta. Burnsiden lemman avulla voidaan myös laskea toisistaan ekvivalenttisesti eroavien shidokujen ja sudokujen lukumäärä.

4 Shidokujen lukumäärä

Määritelmä 4.1. *Shidoku* on 4×4 -muunnelma sudokusta, jonka jokaiselle riville, sarakkeelle ja laatikkoon, on saatava numerot $1, 2, 3, 4$ täsmälleen kerran.

2	1		
4	3		
		3	
		1	4

Lemma 4.2. *Shidoku on latinalainen neliö, jonka aste on 2.*

Lause 4.3. *Shidoku-ruudukkoja on olemassa 288 kappaletta.*

Todistus. Aloitetaan täyttämällä shidokun ensimmäinen laatikko L_1. Ensimmäinen laatikko voidaan täyttää numeroilla $1, 2, 3, 4$ yhteensä $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ eri tavalla.

Shidokun ensimmäinen laatikko on järjestetty, mikäli se on muodossa

1	2		
3	4		

Seuraavaksi tutkitaan kuinka monella tavalla shidoku-ruudukko, jonka ensimmäinen laatikko on järjestetyssä muodossa, voidaan ratkaista. Kun tiedämme kuinka monella tavalla shidoku, jonka ensimmäinen laatikko on järjestetty, pystytään ratkaisemaan, niin riittää, että kerromme sen luvulla 24, jotta saamme kaikkien shidoku-ruudukkojen lukumäärän selville.[15]

Seuraavaksi täytetään shidokun ensimmäinen rivi ja sarake. Molemmille on kaksi eri vaihtoehtoa eli yhteensä $2 \cdot 2 = 4$ vaihtoehtoa. Valitaan soluun $c(1, 3)$

numero 3 ja soluun $c(1,4)$ numero 4, sekä soluun $c(3,1)$ numero 2 ja soluun $c(4,1)$ numero 4. Ainoat eri vaihtoehdot olisivat, että numerot 3 ja 4 sekä 2 ja 4 vaihtaisivat paikkoja keskenään. Nyt meidän täytyy enää laskea shidokuruudukkojen määrä, joiden ensimmäinen laatikko, rivi ja sarake on täytetty ja kertoa niiden lukumäärä luvulla $24 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.[15]

Shidoku, jonka ensimmäinen laatikko, rivi ja sarake on täytetty.

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

On helppoa huomata, että soluun $c(3,3)$ täytyy tulla numero 4, sillä solu $c(3,3)$ on laatikon L_4 ainoa solu, jonne numero 4 voi tulla. Nyt soluun $c(4,4)$ on vain kolme eri kandidaattia 1,2 ja 3. Saadaan siis kolme erilaista shidokuruudukkoa, jotka kaikki saadaan valmiiksi noudattamalla shidokun sääntöjä. [15]

Saadut kolme erilaista shidokua ratkaistuna.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Kaiken kaikkiaan shidoku-ruudukoita on siis $24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 288$. $\square$

Lasketaan seuraavaksi toisistaan eroavien shidokujen lukumäärä käyttämällä Burnsiden lemmaa. Aloitetaan shidokusta, jonka ensimmäinen laatikko on järjestetyssä muodossa. Tätä muotoa oleva shidoku voidaan ratkaista valmiiksi shidokuksi $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ eri tavalla. Näin valmiiksi saadut kaksitoista shidokua näkyvät alla olevasta kuvasta. Jokaisesta kahdestatoista shidokusta saadaan $4! = 24$ lisää shidokuja vaihtamalla shidokun numeroita keskenään. [1]

A

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

B

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

C

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

D

1	2	4	3
3	4	2	1
4	1	3	2
2	3	1	4

E

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

F

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

G

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

H

1	2	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	3	4

I

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

J

1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	4	3

K

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

L

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

Shidokun kierto- ja heijastusoperaatiot muodostavat määritelmän 3.4 mukaisen ryhmän G, jossa on kahdeksan symmetriaoperaatiota, jotka ovat:

1. rot_0 : kierretään shidokua 0 astetta,

2. rot_1 : kierretään shidokua 90 astetta myötäpäivään,

3, rot_2 : kierretään shidokua 180 astetta myötäpäivään,

4. rot_3 : kierretään shidokua 90 astetta vastapäivään,

5. ref_1 : heijastus vaaka-akselin suhteen,

6. ref_2 : heijastus pystyakselin suhteen,

7. ref_3 : heijastus vasemman yläkulman ja oikean alakulman kautta kulkevan diagonaaliakselin suhteen,

8. ref_4 : heijastus oikean yläkulman ja vasemman alakulman kautta kulkevan diagonaaliakselin suhteen.

Lasketaan jokaiselle symmetriaoperaatiolle muuttumattomina pysyvien shidokujen lukumäärä uudelleen numerointi sallien. Operaatio rot_0 ei muuta yhtäkään kahdestatoista shidokusta, operaatiot rot_1, rot_2 ja rot_3, sekä operaatiot ref_1 ja ref_2 muuttavat kaikkia kahtatoista shidokua, eikä uudelleen numeroinnilla päästä lähtötilanteeseen. Operaatiot ref_3 ja ref_4 voidaan onnistuneesti suorittaa shidokuille B ja K niin, että shidoku pysyy muuttumattomana, kunhan heijastuksen jälkeen suorittaa uudelleen numeroinnin. Shidokulle B heijastuksen jälkeen täytyy vaihtaa alkioiden 2 ja 3 paikkoja, sekä shidokulle K alkioiden 1 ja 4 paikkoja. Muille shidokuille operaatioita ref_3 ja ref_4 ei voida suorittaa niin, että shidoku pysyisi muuttumattomana.

Tarkastellaan shidokua B :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Tehdään shidokulle B ensin operaatio ref_3 :

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

Tehdään sitten uudelleen numerointi $2 \to 3, 3 \to 2$:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Lemman 3.13 nojalla erilaisten shidokujen lukumäärä Λ on symmetrioille muuttumattomina pysyvien shidokujen lukumäärän summa

$$\sum_{\sigma \in G} |fix(\sigma)|$$

jaettuna symmetrioiden lukumäärällä $|G|$. Näin ollen

$$\Lambda = \frac{\sum_{\sigma \in G} |fix(\sigma)|}{|G|}$$

$$= \frac{12 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 24}{8 \cdot 24}$$

$$= \frac{384}{192} = 2.$$

Toisistaan ekvivalentisti eroavia shidoku-ruudukoita on siis vain kaksi kappaletta.

5 Sudokujen lukumäärä

Sudokujen lukumäärän ensimmäisenä laskivat Felgenhauer ja Jarvis [6], joiden kehittämää laskumenetelmää käytetään tässä luvussa.

5.1 Sudokun ensimmäinen nippu

Aloitetaan täyttämällä sudokun ensimmäinen laatikko L_1. Ensimmäinen laatikko voidaa täyttää yhteensä $9! = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1 = 362880$ eri tavalla. Aivan kuten shidokun tapauksessa, tutkimme kuinka monella tavalla sudoku, jonka ensimmäinen laatikko on järjestetyssä muodossa, pystytään ratkaisemaan. Olkoon tämä lukumäärä N_1, jolloin kaikkien sudokujen lukumäärä $N_0 = N_1 \cdot 9!$

Sudoku, jonka ensimmäinen laatikko on järjestetyssä muodossa.

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

Listataan kaikki mahdolliset eri tavat täyttää sudokun ensimmäinen rivi ja jaotellaan ne kahteen eri kategoriaan. Ensimmäisessä kategoriassa ovat rivit, joissa laatikon L_2 minirivin kaikki numerot ovat laatikon L_1 samalta minirivilta. Kaikki muut rivit kuuluvat kategoriaan kaksi.

1. Kategoria, 2 erilaista mahdollista riviä:
$\{4,5,6\}|\{7,8,9\}$ $\qquad$ $\{7,8,9\}|\{4,5,6\}$

2. Kategoria, 18 erilaista mahdollista riviä:

$\{4,5,7\}\|\{6,8,9\}$	$\{6,8,9\}\|\{4,5,7\}$
$\{4,5,8\}\|\{6,7,9\}$	$\{6,7,9\}\|\{4,5,8\}$
$\{4,5,9\}\|\{6,7,8\}$	$\{6,7,8\}\|\{4,5,9\}$
$\{4,6,7\}\|\{5,8,9\}$	$\{5,8,9\}\|\{4,6,7\}$
$\{4,6,8\}\|\{5,7,9\}$	$\{5,7,9\}\|\{4,6,8\}$
$\{4,6,9\}\|\{5,7,8\}$	$\{5,7,8\}\|\{4,6,9\}$
$\{5,6,7\}\|\{4,8,9\}$	$\{4,8,9\}\|\{5,6,7\}$
$\{5,6,8\}\|\{4,7,9\}$	$\{4,7,9\}\|\{5,6,8\}$
$\{5,6,9\}\|\{4,7,8\}$	$\{4,7,8\}\|\{5,6,9\}$

Tässä merkintä $\{4,5,6\}|\{7,8,9\}$ tarkoittaa, että numerot 4, 5 ja 6 voivat olla laatikon L_2 ensimmäisellä minirivillä missä järjestyksessä tahansa ja vastaavasti numerot 7, 8 ja 9 voivat olla laatikon L_3 ensimmäisellä minirivillä missä järjestyksessä tahansa.
Olkoon ylärivi nyt kategoriaan 1 kuuluva $\{4,5,6\}|\{7,8,9\}$, tällöin ensimmäinen nippu on muotoa

1	2	3	{4,	5,	6}	{7,	8,	9}
4	5	6	{7,	8,	9}	{1,	2,	3}
7	8	9	{1,	2,	3}	{4,	5,	6}

Tällaisia ensimmäisiä nippuja on olemassa $(3!)^6$ erilaista, sillä Laatikon L_2 ja L_3 jokaisella minirivillä olevilla numeroilla on 3! erilaista järjestystä. Vastaavasti jos ylärivi olisi kategoriaan 1 kuuluva $\{7,8,9\}|\{4,5,6\}$, niin päästäisiin samaan lopputulokseen. Kategoriasta 1 saadaan yhteensä siis $2 \cdot (3!)^6$ erilaista ensimmäistä nippua.

Kategoriaan 2 kuuluu 18 erilaista riviyhdistelmää. Olkoon ylärivi nyt muotoa $\{4, 5, 7\}|\{6, 8, 9\}$. Tällöin ensimmäinen nippu on muotoa

1	2	3	$\{4,$	$5,$	$7\}$	$\{6,$	$8,$	$9\}$
4	5	6	$\{8,$	$9,$	$a\}$	$\{7,$	$b,$	$c\}$
7	8	9	$\{6,$	$b,$	$c\}$	$\{4,$	$5,$	$a\}$

Ylärivin perusteella ei pystytä päättelemään kaikkia ensimmäiseen nippuun kuuluvien solujen numeroiden paikkoja. Merkinnät a, b ja c kuvaavat numeroita 1, 2 ja 3, eikä niiden tarkkoja paikkoja tiedetä. Ne voidaan kuitenkin sijoittaa miniriveille vain kolmella eri tavalla. Ensimmäinen vaihtoehto on, että numero a on laatikon L_2 toisella minirivillä. Tällöin numerot b ja c ovat laatikon L_2 kolmannella minirivillä ja laatikko L_3 ratkeaa laatikkoon L_2 tehtyjen sijoitusten avulla. Toinen vaihtoehto on, että b on laatikon L_2 toisella minirivillä ja kolmas vaihtoehto on, että c on laatikon L_2 toisella minirivillä. Otetaan huomioon, että minirivien alkioiden paikkaa voidaan muuttaa $(3!)^6$ tavalla ja, että erilaisia riviyhdistelmiä oli 18 kappaletta, jolloin kategorian 2 erilaisten ensimmäisten nippujen lukumääräksi saadaan $18 \cdot 3 \cdot (3!)^6$.

Yhteensä ensimmäisiä nippuja, joiden ensimmäinen laatikko on järjestetyssä muodossa on

$$2 \cdot (3!)^6 + 18 \cdot 3 \cdot (3!)^6 = 2612736$$

ja sudokun ensimmäisiä nippuja on tällöin yhteensä

$$9! \cdot 2612736 = 948109639680.$$

5.2 Vähennyksiä symmetrian avulla

Nyt kun tiedämme sudokun ensimmäisten nippujen lukumäärän, voimme yksitellen valita jonkin nipun ja laskea kuinka monella eri tavalla valittu sudoku voidaan ratkaista. Jos teemme tämän kaikille eri 2612736 vaihtoehdolle, niin saamme selville sudokujen lukumäärän. Tämä kuitenkin veisi aivan liikaa aikaa vaikka apuna olisikin tietokone. Pyrimmekin pienentämään lukua 2612736 huomioiden luvun 3 sudoku-symmetriat 2-7. Uudelleen numerointia ei oteta enää huomioon, sillä se on jo huomioitu, kun nipun ensimmäinen laatikko on laitettu järjestettyyn muotoon.

Leksikografinen järjestys

Tehdään nipuille seuraavat kaksi askelta:

1. Vaihdetaan laatikoissa L_2 ja L_3 minisarakkeiden paikkoja niin, että laatikkojen ylimmät minirivit ovat kasvavassa järjestyksessä.

2. Tarvittaessa vaihdetaan laatikkojen L_2 ja L_3 paikkoja niin, että laatikon L_2 ensimmäisen minisarakkeen ensimmäinen numero on suurempi kuin laatikon L_3 ensimmäisen minisarakkeen ensimmäinen numero.

Ensimmäisellä askeleella saadaan jokaiselle sudokulle $(3!)^2 = 36$ ekvivalenttia sudokua, sillä molemmissa laatikoissa on kolme minisaraketta. Toinen askel käytännössä tuplaa ekvivalenttien sudokujen lukumäärän. Pelkästään leksikografisella järjestyksellä ekvivalentisti eroavien ensimmäisten nippujen lukumäärä vähenee

$$\frac{2612736}{72} = 36288$$

kappaleeseen.[6]

Sarakkeiden ja rivien vaihtaminen

Pinon 1 paikkaa voi vaihtaa pinojen 2 ja 3 kanssa ja myös kaikkien laatikoiden minisarakkeiden paikkoja voi laatikkojen sisällä vaihtaa. Saadaan aikaiseksi $3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! = 6^4 = 1296$ ekvivalenttia sudokua jokaiselle sudokulle. Näiden toimintojen jälkeen ensimmäinen laatikko ei kuitenkaan ole enää järjestetyssä muodossa, joten ensimmäinen laatikko tulee uudelleen numeroida. Russel ja Jarvis [16] laskivat tietokoneiden avustuksella ekvivalentisti erilaisten ensimmäisten nippujen määrän olevan näiden symmetrioiden jälkeen enää 2051 kappaletta.

Sarakkeiden lisäksi ensimmäisen nipun rivien paikkoja voidaan vaihtaa keskenään. Rivien paikkojen vaihtamisen jälkeen ensimmäinen laatikko ei taaskaan ole enää järjestetyssä muodossa. Rivien vaihdon jälkeen pitää suorittaa uudelleen numerointi niin, että ensimmäinen laatikko on taas järjestetyssä muodossa. Rivien vaihdon jälkeen ekvivalentisti erilaisten ensimmäisten nippujen lukumäärä pieneni 416 kappaleeseen.[16]

Esimerkki 5.1. Aloitetaan sudokusta, jonka ensimmäinen nippu on seuraava:

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Vaihdetaan ensin sarakkeiden 1 ja 2 paikkoja, jolloin saadaan alkuperäisen sudokun kanssa ekvivalentti sudoku:

2	1	3	4	5	8	6	7	9
5	4	6	1	7	9	2	3	8
8	7	9	2	3	6	1	4	5

Ensimmäinen laatikko ei enää ole järjestetyssä muodossa. Tehdään uudelleen numerointi. Vaihdetaan alkioiden 1 ja 2, 4 ja 5, sekä 7 ja 8 paikkoja keskenään. Saadaan taas uusi sudoku, joka on ekvivalentti alkuperäisen sudokun kanssa:

1	2	3	5	4	7	6	8	9
4	5	6	2	8	9	1	3	7
7	8	9	1	3	6	2	5	4

Järjestetään laatikot L_2 ja L_3 leksikografiseen järjestykseen vaihtamalla sarakkeiden 4 ja 5 paikkoja. Laatikoiden L_2 ja L_3 paikkoja ei tarvitse vaihtaa, sillä ne ovat jo leksikografisessa järjestyksessä.

1	2	3	4	5	7	6	8	9
4	5	6	8	2	9	1	3	7
7	8	9	3	1	6	2	5	4

Alkuperäinen sudoku on ekvivalentti yllä olevan kanssa ja niillä on yhtä monta ratkaisua.

Numeroiden paikkojen vaihtaminen

Esimerkki 5.2. Tutkimalla alla olevaa nippua havaitaan useita eri numeroita, joiden paikkoja pystytään vaihtamaan keskenään ilman, että se vaikuttaa sudokun ratkaisemiseen. Esimerkiksi sarakkeiden 6 ja 9 numeroiden 8 ja 9 paikkoja voidaan vaihtaa.

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Saadaan uusi nippu, joka voidaan ratkaista yhtä monella tavalla valmiiksi sudokuksi alkuperäisen kanssa.

1	2	3	4	5	9	6	7	8
4	5	6	1	7	8	2	3	9
7	8	9	2	3	6	1	4	5

Samalla tavalla alkuperäisessä nipussa voitaisiin vaihtaa sarakkeiden 1 ja 4 numeroiden 1 ja 4 paikkoja, sarakkeiden 2 ja 9 numeroiden 5 ja 8 paikkoja, sarakkeiden 4 ja 7 numeroiden 1 ja 2 paikkoja, sekä sarakkeiden 3 ja 6 numeroiden 6 ja 9 paikkoja. Tämä sama metodi toimii useammallekin numerolle, kunhan eri laatikoiden sarakkeilta löytyy samat numerot missä tahansa järjestyksessä. Alla olevasta sudokusta on tummennettu laatikoiden ensimmäiseltä ja toiselta sarakkeelta löytyvät numerot 1,2,4 ja 5.

1	**2**	3	**4**	6	7	**5**	8	9
4	**5**	6	**1**	9	8	3	**2**	7
7	8	9	**2**	**5**	3	**1**	**4**	6

Tummennettujen numeroiden paikkoja voidaan vaihtaa ja saadaan aikaiseksi uusi sudoku.

4	**5**	3	**2**	6	7	**1**	8	9
1	**2**	6	**5**	9	8	3	**4**	7
7	8	9	**4**	**1**	3	**5**	**2**	6

Tämä pitää vielä uudelleen numeroida ja järjestää leksikografiseen järjestykseen. Näin saatava sudoku voidaan ratkaista yhtä monella tavalla kuin alkuperäinen sudoku. Täten laskemisprosessia varten niitä voidaan pitää samanlaisina.

Numeroiden paikkojen vaihtamisen jälkeen on erilaisia ensimmäisiä nippuja vain 71 kappaletta. Russel kävi vielä nämä kaikki 71 erilaista ensimmäistä nippua läpi ja sai pienennettyä ekvivalentisti eroavien nippujen lukumäärän 44 kappaleeseen. [6]

5.3 Lopputulos

Tässä vaiheessa meillä on jäljellä enää 44 ensimmäistä nippua. Tiedämme, että kaikki ensimmäiset niput voidaan ratkaista yhtä monella tavalla, kuin jokin jäljelle jääneestä 44 nipusta. Täytyy enää laskea kuinka monella eri tavalla jokainen jäljelle jäänyt nippu voidaan ratkaista valmiiksi sudokuksi, ja kuinka monta ekvivalenttia nippua kullakin jäljelle jäänellä nipulla on. Jarvis ja Russel [6] laskivat tietokoneavusteisesti kuinka monella tavalla jäljelle jääneet niput voidaan ratkaista ja kuinka monta ekvivalenttia nippua jokaisella on.

Esimerkki 5.3. Ensimmäisiä nippuja, joilla on järjestetty ensimmäinen laatikko on 2612736 kappaletta. Russel ja Jarvis laskivat tietokoneavusteisesti, että näistä 178848 kappaletta ovat ekvivalentteja alla olevan nipun kanssa, joka on yksi 44 jäljelle jääneestä nipusta ja täten kaikki 178848 ensimmäistä nippua voidaan ratkaista yhtä monella tavalla kuin alla oleva nippu

1	2	3	4	7	8	5	6	9
4	5	6	1	3	9	2	7	8
7	8	9	2	5	6	1	3	4

Russel ja Jarvis laskivat, että yllä oleva nippu voidaan ratkaista valmiiksi sudokuksi yhteensä 7053225408 eri tavalla. Tästä yhdestä nipusta saadaan valmiita sudokuja, joilla on järjestetty ensimmäinen laatikko $178848 \cdot 7053225408 = 1261455257769984$ kappaletta. Samat laskutoimitukset on tehty kaikille muille 43 ensimmäiselle nipulle ja näin on saatu sellaisten sudokujen lukumäärä selville, joilla on ensimmäinen laatikko järjestetyssä muodossa. Olkoon tällaisten sudokujen lukumäärä N_1. Lopullinen sudokujen lukumäärä on tällöin $N_0 = N_1 \cdot 9!$.

Lause 5.4. *Sudokujen lukumääräksi saadaan*

$$N_0 = 6670903752021072936960 \approx 6,671 \cdot 10^{21}.$$

Lause 5.5. *Käyttämällä Burnsiden lemmaa Russel ja Jarvis [16] osoittivat, että toisistaan ekvivalentisti eroavia sudokuja on olemassa 5472730538 kappaletta.*

Jarviksen ja Russelin tulokset on varmistanut oikeaksi useampi henkilö. Monet ovat yrittäneet laskea sudokujen lukumäärää usealla eri tavalla. Kevin Kilfoil pääsi todella lähelle oikeaa lukumäärää yksinkertaisella laskumenetelmällä. Tarkastellaan hänen laskumenetelmää alla olevassa esimerkissä.

Esimerkki 5.6. Tapoja täydentää sudokun yhdeksän laatikkoa niin, että jokaisessa laatikossa on numerot $\{1, 2, ..., 9\}$ täsmälleen kerran, on

$$N = (9!)^9.$$

Tiedämme myös kuinka monella eri tavalla laatikot $L_1 - L_3$ voidaan täyttää niin, että jokaisella rivillä ja laatikossa on jokainen numero $\{1, 2, ..., 9\}$ täsmälleen kerran. Laskimme tämän kappaleessa 5.1 ja saimme lukumääräksi 948109639680. Samalla tavalla laatikot $L_4 - L_6$ ja $L_7 - L_9$ voidaan täyttää 948109639680 eri tavalla. Laatikot $L_1 - L_9$ voidaan yhteensä täyttää 948109639680^3 eri tavalla niin, että jokaisessa laatikossa ja jokaisella rivillä on alkiot $\{1, 2, ..., 9\}$ täsmälleen kerran.
Jakamalla tämä tapojen lukumäärällä, joilla laatikot $L_1 - L_9$ voidaan täyttää, saadaan riviominaisuuden toteuttavien kokoonpanojen osuus k kaikista kokoonpanoista, siis

$$k = \frac{948109639680^3}{(9!)^9}.$$

Vastaavasti ensimmäinen, toinen ja kolmas pino voidaan täyttää 948109639680^3 eri tavalla niin, että jokaisessa laatikossa ja jokaisella sarakkeella on alkiot $\{1, 2, ..., 9\}$ täsmälleen kerran. Sudokun pitää täyttää molemmat sarake- ja riviehto, ja jos oletetaan näiden olevan riippumattomia toisistaan, saadaan sudokujen lukumääräksi

$$Nk^2 = \frac{948109639680^6}{(9!)^9} \approx 6.6571 \cdot 10^{21}.$$

Lukumäärän pieni virhe johtuu siitä, että todellisuudessa sarake- ja riviehto ovat toisistaan riippuvaisia.[6]

6 Rodokujen lukumäärä

Kokoa 6×6 olevaa sudokua kutsutaan *rodokuksi*. Rodoku-ruudukko voi olla joko $S^{3,2}$ tai $S^{2,3}$, mutta selvyyden vuoksi viitatessa rodokuun tarkoitetaan $S^{3,2}$ ruudukkoa.

Määritelmä 6.1. *Rodoku-ruudukko* $S^{3,2}$ koostuu kuudesta rivistä, jotka muodostavat kaksi nippua ja kuudesta sarakkeesta, jotka muodostavat kolme pinoa. Rodokussa on yhteensä kuusi laatikkoa ja jokainen 3×2 -laatikko sisältää kolme miniriviä eli *tasoa* ja kaksi minisaraketta eli *pylvästä*. Jokaiselle rodokun riville, sarakkeelle ja laatikkoon tulee numerot $\{1, 2, ..., 6\}$ täsmälleen kerran.

Esimerkki 6.2. Rodoku

1	4	3	6	2	5
3	6	2	5	4	1
2	5	4	1	6	3
4	1	6	3	5	2
6	3	5	2	1	4
5	2	1	4	3	6

Merkinnällä $S^{3,2}_{a,b}$ viitataan laatikkoon, joka sijaitsee nipussa a, $a \in \{1, 2\}$, ja pinossa b, $b \in \{1, 2, 3\}$. Jokainen laatikon $S^{3,2}_{a,b}$ minirivi eli taso sisältää kaksi numeroa ja nämä tasojen parit muodostaa joukon $T_{a,b}$. Vastaavasti jokainen laatikon $S^{3,2}_{a,b}$ minisarake eli pylväs sisältää kolme numeroa ja nämä kahden pylvään muodostamat kolmikot muodostaa joukon $P_{a,b}$. Merkinnällä $[S^{3,2}_{a,b}]_{i,j}$ viitataan laatikon $S^{3,2}_{a,b}$ soluun $c(i, j)$.[10]

Määritelmä 6.3. Rodoku-ruudukko on *järjestetyssä muodossa* $s^{3,2}$, kun seuraavat viisi ehtoa täyttyvät. [11]

1. $S^{3,2}_{1,1}$ on kasvavassa järjestyksessä, eli $[S^{3,2}_{1,1}]_{i,j} = (j-1) \cdot 3 + i$.

2. Jokaiselle laatikolle $S^{3,2}_{1,b}$, kun $b = 2, 3$, numerot soluissa $[S^{3,2}_{1,b}]_{1,j}$ kasvavat, kun $j = 1, 2$.

3. Laatikolle $S^{3,2}_{2,1}$, numerot soluissa $[S^{3,2}_{2,1}]_{i,1}$ kasvavat, kun $i = 1, 2, 3$.

4. $[S^{3,2}_{1,2}]_{1,1} \leq [S^{3,2}_{1,3}]_{1,1}$.

5. $[S^{3,2}_{1,1}]_{1,1} \leq [S^{3,2}_{2,1}]_{1,1}$.

Esimerkki 6.4. Rodoku järjestetyssä muodossa

1	4	2	5	3	6
2	5	3	6	1	4
3	6	1	4	2	5
4	1	6	3	5	2
5	2	4	1	6	3
6	3	5	2	4	1

6.1 Rodokun ensimmäinen nippu

Joukko R sisältää kaikki mahdolliset rodoku-ruudukon ensimmäiset niput, jotka ovat järjestetyssä muodossa. Kaikki joukon R niput jaotellaan vielä viiteen eri osajoukkoon $R_1, \ldots, R_5 \subset R$, niin että $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5 = R$ ja $R_i \cap R_j = \emptyset$, kun $i \neq j$. Jaottelu viiteen eri osajoukkoon tapahtuu pylväiden joukkojen $P_{1,1}, P_{1,2}, P_{1,3}$ sekä tasojen joukkojen $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}$ mukaan niin, että jokainen alkio, joka kuuluu osajoukkoon R_i omaa samat ominaisuudet.[10]

• $r_1 \in R$ kuuluu osajoukkoon R_1, jos $P_{1,2} = P_{1,3}$.

• $r_2 \in R$ kuuluu osajoukkoon R_2, jos $T_{1,1} = T_{1,2} = T_{1,3}$ ja $P_{1,2} \neq P_{1,3}$.

•$r_3 \in R$ kuuluu osajoukkoon R_3 jos: kumpikaan pylväs joukosta $P_{1,2}$ ei sisällä molempia numeroita jostain tasosta $t \in T_{1,1}$ ja molemmat pylväät joukosta $P_{1,3}$ sisältää molemmat numerot jostakin tasosta $t \in T_{1,1}$; tai, jos kumpikaan pylväs joukosta $P_{1,3}$ ei sisällä molempia numeroita jostakin tasosta $t \in T_{1,1}$ ja molemmat pylväät joukosta $P_{1,2}$ sisältää molemmat numerot jostakin tasosta $t \in T_{1,1}$.

•$r_4 \in R$ kuuluu osajoukkoon R_4 jos molempien joukkojen $P_{1,2}$ ja $P_{1,3}$ pylväät sisältää yhden numeron tason t_i parista ja molemmat numerot joko tasosta t_j tai t_k, kun $t_i, t_j, t_k \in T_{1,1}(i, j, k$ ovat kaikki erisuuria).

• $r_5 \in R$ kuuluu osajoukkoon R_5 jos joukon $P_{1,2}$ molemmat pylväät sisältävät täsmälleen yhden numeron tasosta t_i ja molemmat numerot joko tasoparista t_j tai t_k ja joukon $P_{1,3}$ molemmat pylväät sisältävät täsmälleen yhden numeron tasosta t_j ja molemmat numerot joko tasoparista t_i tai t_k, kun $t_i, t_j, t_k \in T_{1,1}(i, j, k$ ovat kaikki erisuuria).

Esimerkki 6.5. Esimerkit jokaiseen eri osajoukkoon kuuluvista ensimmäisistä nipuista.[9]

1	4	2	5	3	6
2	5	3	6	4	1
3	6	4	1	2	5

r_1

1	4	2	5	3	6
2	5	3	6	4	1
3	6	4	1	5	2

r_2

1	4	2	6	3	5
2	5	3	4	1	6
3	6	1	5	4	2

r_3

1	4	2	6	3	5
2	5	3	1	4	6
3	6	5	4	1	2

r_4

1	4	2	6	3	5
2	5	3	4	6	1
3	6	5	1	4	2

r_5

Lause 6.6. *Joukkoon R_1 kuuluu 8 rodokua.*

Todistus. On olemassa vain yksi tapa järjestää numerot laatikossa $S^{3,2}_{1,1}$, jotta rodoku on järjestetyssä muodossa. On yksi tapa järjestää joukon $T_{1,1}$ tasoparit joukkojen $T_{1,2}$ ja $T_{1,3}$ tasopareiksi niin, että $T_{1,1} = T_{1,2} = T_{1,3}$. Tämän jälkeen on neljä tapaa järjestää tasoparien numerot molempiin joukon $P_{1,2}$ pylväisiin, jonka jälkeen on vain yksi tapa järjestää tasoparit molempiin joukon $P_{1,3}$ pylväisiin, niin että $P_{1,2} = P_{1,3}$. Toisaalta on neljä eri tapaa järjestää joukon $T_{1,1}$ tasoparit joukkojen $T_{1,2}$ ja $T_{1,3}$ tasopareiksi niin, että $T_{1,1} \neq T_{1,2} \neq T_{1,3}$. Kaikissa neljässä eri tapauksessa on vain yksi tapa järjestää numerot pylväisiin niin, että $P_{1,1} = P_{1,2} = P_{1,3}$. Yhteensä saadaan siis $4 + 4 = 8$ erilaista ensimmäistä nippua.[9] □

Lause 6.7. *Joukkoon R_2 kuuluu 12 rodokua.*

Todistus. On olemassa vain yksi tapa järjestää numerot laatikossa $S^{3,2}_{1,1}$, jotta rodoku on järjestetyssä muodossa. On yksi tapa järjestää joukon $T_{1,1}$ tasoparit joukkojen $T_{1,2}$ ja $T_{1,3}$ tasopareiksi niin, että $T_{1,1} = T_{1,2} = T_{1,3}$. Tämän jälkeen on neljä tapaa järjestää tasoparien numerot molempiin joukon $P_{1,2}$ pylväisiin, jonka jälkeen on kolme tapaa järjestää numerot joukon $P_{1,3}$ pylväisiin niin, että $P_{1,2} \neq P_{1,3}$. Yhteensä saadaan siis $4 \cdot 3 = 12$ erilaista ensimmäistä nippua.[9] □

Lause 6.8. *Joukkoon R_3 kuuluu 24 rodokua.*

Todistus. On olemassa vain yksi tapa järjestää numerot laatikossa $S^{3,2}_{1,1}$, jotta rodoku on järjestetyssä muodossa. On neljä eri tapaa järjestää joukon $T_{1,1}$ tasoparit joukkojen $T_{1,2}$ ja $T_{1,3}$ tasopareiksi niin, että $T_{1,1} \neq T_{1,2} \neq T_{1,3}$. Tämän jälkeen on yksi tapa järjestää joukon $T_{1,2}$ tasoparit niin, että kaksi numeroa jokaisesta tasoparista $t \in T_{1,1}$ ovat joukon $P_{1,2}$ eri pylväissä (tai vastaavasti joukon $P_{1,3}$ pylväissä), jonka jälkeen on kolme eri tapaa järjestää numerot joukon $P_{1,3}$ pylväisiin (vastaavasti $P_{1,2}$) niin, että $P_{1,2} \neq P_{1,3}$, eli 6 eri järjestystä. Yhteensä saadaan siis $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ erilaista ensimmäistä nippua.[9] □

Lause 6.9. *Joukkoon R_4 kuuluu 12 rodokua.*

Todistus. On olemassa vain yksi tapa järjestää numerot laatikossa $S^{3,2}_{1,1}$, jotta rodoku on järjestetyssä muodossa. On neljä eri tapaa järjestää joukon $T_{1,1}$ tasoparit joukkojen $T_{1,2}$ ja $T_{1,3}$ tasopareiksi niin, että $T_{1,1} \neq T_{1,2} \neq T_{1,3}$. Mikä tahansa kolmesta tasoparista $t \in T_{1,1}$ voidaan valita ja sen numerot voidaan asettaa joukon $P_{1,2}$ eri pylväisiin, samalla määrittäen muiden numeroiden paikat. Koska numerot valitusta tasosta ovat myös joukon $P_{1,3}$ eri pylväissä, niin on vain yksi tapa järjestää numerot laatikkoon $S^{3,2}_{1,3}$ niin, että $P_{1,1} \neq P_{1,2} \neq P_{1,3}$. Yhteensä saadaan siis $4 \cdot 3 = 12$ erilaista ensimmäistä nippua.[9] □

Lause 6.10. *Joukkoon R_5 kuuluu 24 rodokua.*

Todistus. On olemassa vain yksi tapa järjestää numerot laatikossa $S^{3,2}_{1,1}$, jotta rodoku on järjestetyssä muodossa. On neljä eri tapaa järjestää joukon $T_{1,1}$ tasoparit joukkojen $T_{1,2}$ ja $T_{1,3}$ tasopareiksi niin, että $T_{1,1} \neq T_{1,2} \neq T_{1,3}$. Mikä tahansa kolmesta tasoparista $t \in T_{1,1}$ voidaan valita ja sen numerot voidaan asettaa joukon $P_{1,2}$ eri pylväisiin, samalla määrittäen muiden numeroiden paikat. Jäljellä on kaksi tasoparia $t \in T_{1,1}$, jotka ovat eri pylväissä joukossa $P_{1,3}$. Toinen tasopari valitaan ja on vain yksi tapa asettaa numerot joukon $P_{1,3}$ pylväisiin niin, että $P_{1,1} \neq P_{1,2} \neq P_{1,3}$. Yhteensä saadaan siis $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ erilaista ensimmäistä nippua.[9] □

Lause 6.11. *Joukkoon R kuuluu 80 rodokua.*

Todistus. Koska $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5 = R$ ja $R_i \cap R_j = \emptyset$, niin lauseiden $6.6 - 6.10$ nojalla

$$|R| = 8 + 12 + 24 + 12 + 24 = 80.$$

□

6.2 Rodokun toisen nipun ominaisuuksia

Olkoon rodokun ensimmäinen nippu järjestetyssä muodossa. Laatikon $S^{3,2}_{2,1}$ solut $[S^{3,2}_{2,1}]_{1,1}$, $[S^{3,2}_{2,1}]_{2,1}$ ja $[S^{3,2}_{2,1}]_{3,1}$ ovat myös täytetty järjestetyn muodon mukaisesti kasvavaan järjestykseen. Nyt laatikon $S^{3,2}_{2,1}$ tyhjäksi jääneet kolme solua voidaan täyttää yhteensä $3! = 6$ erilaisella tavalla. Tämän jälkeen on 2 erilaista tapaa täyttää laatikon $S^{3,2}_{2,2}$ molemmat pylväät. Kun laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ on täytetty, niin laatikko $S^{3,2}_{2,3}$ voidaan täyttää vain yhdellä tavalla. Täten on $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ erilaista tapaa järjestää laatikoiden $S^{3,2}_{2,1}$ ja $S^{3,2}_{2,2}$ numerot, kun rodoku ruudukko on järjestetyssä muodossa.

Muutetaan laatikon $S^{3,2}_{1,3}$ ennalta määrättyä järjestystä niin, että joukon $T_{1,3}$ tasoparit säilyvät ennallaan, mutta tasoparien numerot voivat vaihtaa paikkoja. Tällöin ensimmäinen nippu ei ole enää järjestetyssä muodossa. Tästä eteenpäin viitattaessa järjestettyyn muotoon tarkoitetaan tätä yllä kuvailtua muotoa. Tämän muunnelman kautta järjestettyjen ensimmäisten nippujen lukumäärä kasvaa $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ kertaiseksi. Muutoksen avulla laskemisprosessi tulevaisuudessa helpottuu.[9]

Asetetaan, että joukkojen $T_{1,1}$ ja $T_{1,2}$ tasoparit muodostaa joukon Λ ja joukkojen $T_{2,1}, T_{2,2}$ tasoparit muodostaa joukon Ω. Tasoparit joukoissa $T_{1,3}$ ja $T_{2,3}$ määräytyvät nyt muiden laatikoiden tasoparien mukaan automaattisesti.

Määritelmä 6.12. Jos $\alpha = \delta$ jollekin $\alpha \in \Lambda$ ja jollekin $\delta \in \Omega$, niin rodokun kaksi ensimmäistä pinoa sisältää *riviparin* (eng. twin-row).

Olkoon laatikko $S^{3,2}_{a,b}$, kun $a = 1, 2$ ja $b = 1, 2$, täytetty rodokun sääntöjen mukaisesti. Tällöin joukkojen $T_{1,3}$ ja $T_{2,3}$ tasoparit määräytyvät automaattisesti. Lukumäärä, joilla laatikot $S^{3,2}_{1,3}$ ja $S^{3,2}_{2,3}$ voidaan täyttää, on riippuvainen joukkojen $T_{1,3}$ ja $T_{2,3}$ yhteisistä tasopareista eli ripipareista. Ripipareja joukoilla $T_{1,3}$ ja $T_{2,3}$ voi olla nolla eli $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = 0$, yksi eli $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = 1$ tai kolme eli $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = 3$.

Lause 6.13. *Kun $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = x$, niin on olemassa 2^x tapaa järjestää numerot laatikoiden $S^{3,2}_{1,3}$ ja $S^{3,2}_{2,3}$ soluihin kun $x = 3$ ja muulloin tapoja on $2^{(x+1)}$.*

Todistus. Jokainen joukkojen $T_{1,3}$ ja $T_{2,3}$ rivipari edustaa paria, jonka numeroiden paikkoja voidaan vaihtaa keskenään ja joiden paikka molempien laatikoiden $S^{3,2}_{1,3}$ ja $S^{3,2}_{2,3}$ soluihin on riippumaton muiden näiden laatikoiden numeroiden paikoista. Tästä saamme x paria, joiden numeroiden paikkoja voidaan vaihtaa, eli 2^x erilaista järjestystä. Täten kun ripipareja on kolme kappaletta, niin erilaisia järjestyksiä on 2^3 kappaletta. Kun ripipareja ei ole 3 kappaletta, niin jäljelle jääneet joukkojen $T_{1,3}$ ja $T_{2,3}$ tasoparit, jotka eivät muodosta ripipareja, muodostavat joukon, josta kun yhden numeron sijoittaa johonkin vapaaseen soluun, niin loppujen numeroiden paikat määräytyvät automaattisesti molempiin laatikoihin $S^{3,2}_{1,3}$ ja $S^{3,2}_{2,3}$. Täten jos $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = x$, niin on olemassa x paria, joiden numeroiden paikkoja voidaan vaihtaa, kun $x = 3$, ja $x + 1$ paria, kun $x \neq 3$. [9] □

Viimeisen pinon riviparit määräävät lauseen 6.13 nojalla, kuinka monella tavalla viimeinen pino voidaan täyttää. Kun $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = 3$, niin erilaisia viimeisiä pinoja on olemassa $2^3 = 8$. Kun $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = 1$, niin erilaisia viimeisiä pinoja on olemassa $2^{1+1} = 4$. Kun $|T_{1,3} \cap T_{2,3}| = 0$, niin erilaisia viimeisiä pinoja on olemassa $2^{0+1} = 2$. [10]

6.3 Rodokujen lopullinen lukumäärä

Kuten jo aikaisemmin saimme selville, on 24 eri tapaa järjestää laatikoiden $S^{3,2}_{2,1}$ ja $S^{3,2}_{2,2}$ numerot. Lasketaan seuraavaksi jokaisen erilaisen mahdollisen järjestyksen $r_i \in R$ riviparien lukumäärä viimeisessä nipussa näissä 24:ssä erilaisessa tapauksessa. Riviparien lukumäärien avulla voidaan päätellä, kuinka monella eri tavalla numerot voidaan järjestää niin, että saadaan valmis rodoku.

Lause 6.14. *Osajoukkoon R_1 kuuluvat kokoonpanot voidaan täyttää valmiiksi rodoku-ruudukoksi 96 eri tavalla.*

Todistus. Olkoon nyt laatikoilla $S^{3,2}_{1,2}$ ja $S^{3,2}_{1,3}$ osajoukon R_1 vaatimukset toteuttavat ominaisuudet. Laatikon $S^{3,2}_{2,1}$ solut $[S^{3,2}_{2,1}]_{1,1}$, $[S^{3,2}_{2,1}]_{2,1}$ ja $[S^{3,2}_{2,1}]_{3,1}$ ovat myös täytetty järjestetyn muodon mukaisesti kasvavaan järjestykseen. Nyt laatikon $S^{3,2}_{2,1}$ tyhjäksi jääneet kolme solua voidaan täyttää yhteensä $3! = 6$ erilaisella tavalla. Havaitaan, että on olemassa kolmea erilaista vaihtoehtoa. Joko $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 3$ (yksi kappale), $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$ (kolme kappaletta) tai $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$ (kaksi kappaletta). Jokaiselle kokoonpanolle riviparien lukumäärä lasketaan kaikissa erilaisissa tapauksissa, joilla laatikon $S^{3,2}_{2,2}$ joukon $P_{2,2}$ pylväät voidaan täyttää, kun laatikko $S^{3,2}_{2,1}$ on täytetty jollakin näistä edellä mainitusta kolmesta vaihtoehdosta. Laatikon $S^{3,2}_{2,2}$ joukon $P_{2,2}$ kumpikin pylväs voidaan täyttää kahdella eri tavalla. Yhteensä erilaisia tapoja täyttää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ on siis $2 \cdot 2 = 4$.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 3$, niin kaksi neljästä tavasta, joilla laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, päätyy tilanteeseen jossa viimeinen pino sisältää kolme riviparia. Kahdella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa viimeinen nippu sisältää nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^{0+1} = 20$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin kaikki neljä eri tapaa järjestää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä pinossa rivipareja on yksi kappale. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $4 \cdot 2^{1+1} = 16$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin yksi neljästä tavasta järjestää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä pinossa on kolme riviparia. Kolmessa muussa tapauksessa viimeisessä pinossa on nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^{0+1} = 14$ erilaista valmista rodokua.

Otetaan vielä huomioon, että ensimmäisiä vaihtoehtoja oli yksi kappale, toisia kolme ja kolmansia kaksi, jolloin lopulliseksi rodokujen lukumääräksi saadaan $1 \cdot 20 + 3 \cdot 16 + 2 \cdot 14 = 96$. [9] □

Lause 6.15. *Osajoukkoon R_2 kuuluvat kokoonpanot voidaan täyttää valmiiksi rodoku-ruudukoksi 80 eri tavalla.*

Todistus. Olkoon nyt laatikoilla $S^{3,2}_{1,2}$ ja $S^{3,2}_{1,3}$ osajoukon R_2 vaatimukset toteuttavat ominaisuudet ja verrataan $3! = 6$ erilaista tapaa täyttää laatikko $S^{3,2}_{2,1}$. Havaitaan, että on olemassa kolmea erilaista vaihtoehtoa. Joko $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 3$ (yksi kappale), $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$ (kaksi kappaletta) tai $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$ (kolme kappaletta). Jokaiselle kokoonpanolle riviparien lukumäärä viimeisessä nipussa lasketaan kaikissa neljässä eri tapauksessa tutkimalla, kuinka laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, kun laatikko $S^{3,2}_{2,1}$ on täytetty jollakin näistä kolmesta vaihtoehdosta.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 3$, niin kaksi neljästä tavasta, joilla laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, päätyy tilanteeseen, jossa viimeinen pino sisältää kolme riviparia. Kahdella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa viimeinen pino sisältää nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^{0+1} = 20$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin yhdessä neljästä tavasta, joilla laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, päädytään tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on yksi rivipari. Kolmella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa viimeinen pino sisältää nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^{1+1} + 3 \cdot 2^{0+1} = 10$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin yhdessä kolmesta vaihtoehdosta myös $P_{2,1} = P_{1,2}$, jolloin kaikki neljä eri tapaa järjestää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä pinossa on yksi rivipari. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $4 \cdot 2^{1+1} = 16$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin kahdessa kolmesta vaihtoehdosta $P_{2,1} \neq P_{1,2}$, jolloin kaksi neljästä tavasta, joilla laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ voidaan täyttää, päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä pinossa on yksi rivipari. Kahdella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $2 \cdot 2^{1+1} + 2 \cdot 2^{0+1} = 12$ erilaista valmista rodokua.

Otetaan vielä huomioon, että ensimmäisiä vaihtoehtoja oli yksi kappale, toisia kaksi ja kolmansia kolme (kahta erilaista variaatioita), jolloin lopulliseksi rodokujen lukumääräksi saadaan $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 12 = 80$.[9] $\square$

Lause 6.16. *Osajoukkoon R_3 kuuluvat kokoonpanot voidaan täyttää valmiiksi rodoku-ruudukoksi 72 eri tavalla.*

Todistus. Olkoon nyt laatikoilla $S_{1,2}^{3,2}$ ja $S_{1,3}^{3,2}$ osajoukon R_3 vaatimukset toteuttavat ominaisuudet ja verrataan $3! = 6$ erilaista tapaa täyttää laatikko $S_{2,1}^{3,2}$. Havaitaan, että on olemassa kahta erilaista vaihtoehtoa. Joko $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$ (kaksi kappaletta) tai $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$ (neljä kappaletta). Jokaiselle kokoonpanolle riviparien lukumäärä viimeisessä nipussa lasketaan kaikissa neljässä eri tapauksessa tutkimalla, kuinka laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ voidaan täyttää, kun laatikko $S_{2,1}^{3,2}$ on täytetty jommallakummalla kahdella edellä mainitulla vaihtoehdolla.

Yhdellä neljästä tapauksesta kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin myös $|T_{2,1} \cap T_{2,3}| = 1$ ja kaikki neljä eri tapaa järjestää laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa aripareja on yksi kappale. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $4 \cdot 2^{1+1} = 16$ erilaista valmista rodokua.

Kolmella neljästä tapauksesta kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin $|T_{2,1} \cap T_{2,3}| \neq 1$, jolloin yksi neljästä tavasta järjestää laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa aripareja on yksi kappale. Loput kolme päätyvät tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa aripareja on nolla kappaletta. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^{1+1} + 3 \cdot 2^{0+1} = 10$ erilaista valmista rodokua.

Yhdellä kahdesta tapauksesta kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin myös $|T_{2,1} \cap T_{2,3}| = 0$, jolloin kaksi neljästä tavasta, joilla laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ voidaan täyttää, päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä pinossa on yksi rivipari. Kahdella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $2 \cdot 2^{1+1} + 2 \cdot 2^{0+1} = 12$ erilaista valmista rodokua

Yhdellä kahdesta tapauksesta kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin $|T_{2,1} \cap T_{2,3}| \neq 0$, jolloin yksi neljästä tavasta, joilla laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ voidaan täyttää, sisältää kolme riviparia. Kolmella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa aripareja on nolla kappaletta. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^{0+1} = 14$

erilaista valmista rodokua.

Otetaan vielä huomioon vaihtoehtojen lukumäärät, jolloin lopulliseksi rodokujen lukumääräksi saadaan $1 \cdot 16 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 14 = 72$. [9] $\square$

Lause 6.17. *Osajoukkoon R_4 kuuluvat kokoonpanot voidaan täyttää valmiiksi rodoku-ruudukoksi 96 eri tavalla.*

Todistus. Olkoon nyt laatikoilla $S^{3,2}_{1,2}$ ja $S^{3,2}_{1,3}$ osajoukon R_4 vaatimukset toteuttavat ominaisuudet ja verrataan $3! = 6$ erilaista tapaa täyttää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$. Havaitaan, että on olemassa kahta erilaista vaihtoehtoa. Joko $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$ (kaksi kappaletta) tai $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$ (neljä kappaletta). Kummallekin kokoonpanolle riviparien lukumäärä lasketaan kaikissa neljässä eri tapauksessa, tutkimalla kuinka laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, kun laatikko $S^{3,2}_{2,1}$ on täytetty jollakin näistä kahdesta vaihtoehdosta.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin kahdessa neljästä tavasta, joilla laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, päädytään tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on yksi rivipari. Kahdella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa rivipareja viimeisessä nipussa on nolla kappaletta. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $2 \cdot 2^{1+1} + 2 \cdot 2^{0+1} = 12$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin yksi neljästä tavasta järjestää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on kolme riviparia. kaksi neljästä tavasta järjestää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ päätyy tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa rivipareja on yksi kappale ja viimeisellä tavalla järjestää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ päädytään tilanteeseen, jossa rivipareja ei ole viimeisessä nipussa yhtään kappaletta. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^{1+1} + 1 \cdot 2^{0+1} = 18$ erilaista valmista rodokua.

Otetaan vielä huomioon vaihtoehtojen lukumäärät, jolloin lopulliseksi rodokujen lukumääräksi saadaan $2 \cdot 12 + 4 \cdot 18 = 96$. [9] $\square$

Lause 6.18. *Osajoukkoon R_5 kuuluvat kokoonpanot voidaan täyttää valmiiksi rodoku-ruudukoksi 80 eri tavalla.*

Todistus. Olkoon nyt laatikoilla $S^{3,2}_{1,2}$ ja $S^{3,2}_{1,3}$ osajoukon R_5 vaatimukset toteuttavat ominaisuudet ja verrataan $3! = 6$ erilaista tapaa täyttää laatikko $S^{3,2}_{2,2}$. Havaitaan, että on olemassa kahta erilaista vaihtoehtoa. Joko $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$ (kaksi kappaletta) tai $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$ (neljä kappaletta). Kaikille kokoonpanoille riviparien lukumäärä viimeisessä pinossa lasketaan kaikissa neljässä eri tapauksessa tutkimalla, kuinka laatikko $S^{3,2}_{2,2}$ voidaan täyttää, kun laatikko

$S_{2,1}^{3,2}$ on täytetty jommalla kummalla näistä kahdesta vaihtoehdosta.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 1$, niin kaksi neljästä tavasta, joilla laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ voidaan täyttää, päätyy tilanteeseen, jossa viimeinen pino sisältää yhden riviparin. Kahdella muulla tavalla päädytään tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on nolla riviparia. Yhteensä lauseen 6.13 nojalla saadaan $2 \cdot 2^{1+1} + 2 \cdot 2^{0+1} = 12$ erilaista valmista rodokua.

Kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin kahdessa neljästä tapauksesta myös $|T_{1,2} \cap T_{2,1}| = 0$, jolloin vain yhdessä neljästä tavasta täyttää laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ päädytään tilanteeseen, jossa viimeisessä nipussa on yksi rivipari. Muulloin viimeisessä nipussa on nolla riviparia eli lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^{1+1} + 3 \cdot 2^{0+1} = 10$ erilaista rodokua.

Kahdessa muussa tapauksessa kun $|T_{1,1} \cap T_{2,1}| = 0$, niin $|T_{1,2} \cap T_{2,1}| \neq 0$, jolloin yhdessä neljästä tavasta täyttää laatikko $S_{2,2}^{3,2}$ viimeiseen nippuun muodostuu kolme riviparia, kahdessa neljästä tavasta yksi rivipari ja yhdessä neljästä tavasta ei yhtään riviparia. lauseen 6.13 nojalla saadaan $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^{1+1} + 1 \cdot 2^{0+1} = 18$ erilaista rodokua.

Otetaan vielä huomioon, erilaisten vaihtoehtojen lukumäärät, jolloin lopulliseksi rodokujen lukumääräksi saadaan $2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 18 = 80$.[9] □

Lause 6.19. *Toisistaan eroavia järjestetyssä muodossa olevia rodoku-ruudukoita on olemassa 816 kappaletta.*

Todistus. Joukko R koostuu kaikista rodoku-ruudukoista, jotka ovat järjestetyssä muodossa ja niiden lukumäärä on lauseen 6.11 nojalla 80. Pitää muistaa, että laatikon $S_{1,1}^{3,2}$ joukon $T_{1,1}$ tasoparien numeroita ei kuitenkaan vielä ole sijoitettu tarkkoihin soluihin. Joukko R jakaantuu viiteen osajoukkoon R_i, $i = 1, ..., 5$, joiden lukumäärät on laskettu. Tiedetään myös kuinka monella eri tavalla numerot voidaan järjestää kussakin rodoku-ruudukossa $r_i \in R_i$ niin, että saadaan valmis rodoku. Toisistaan eroavien järjestetyssä muodossa olevien rodokujen lukumäärä täten on [9] :

$$|s^{3,2}| = \frac{1}{2^3}(8 \cdot 96 + 12 \cdot 80 + 24 \cdot 72 + 12 \cdot 96 + 24 \cdot 80) = 816.$$

□

Lause 6.20. *Rodoku-ruudukoita on* 28200960 *kappaletta.*

Todistus. Toisistaan eroavia järjestetyssä muodossa olevia rodoku-ruudukoita on 816 kappaletta. Uudelleen numeroimalla saadaan yhdestä rodokusta 6! lisää rodokuja. Vaihtamalla rodokun nippujen paikkoja saadaan 2! uusia rodokuja yhdestä rodokusta. Vaihtamalla pinojen sarakkeiden paikkoja saadaan $2 \cdot 2!$ lisää uusia rodokuja ja vaihtamalla rivien paikkoja toisessa nipussa saadaan 3! lisää rodokuja, yhteensä rodokuja on siis [10] :

$$|S^{3,2}| = 816 \cdot 6! \cdot 2! \cdot 2 \cdot 2! \cdot 3! = 28200960.$$

□

Lause 6.21. *Toisistaan ekvivalentisti eroavia rodoku-ruudukoita on olemassa 49 kappaletta.*

Todistus. Kaikista 28200960 rodoku-ruudukosta saadaan aikaiseksi 49 ekvivalentisti eroavaa rodoku-ruudukkoa määritelmän 3.2 symmetrioilla.[9] □

7 Algoritmeja sudokujen ratkaisemiseen

Tässä luvussa käsittelemme erilaisia algoritmeja, joiden avulla voidaan ratkaista haastavia sudokuja. James Crook:in kehittelemän algoritmin avulla sudoku harrastajat pystyvät ratkaisemaan haastavia sudokuja kynän ja paperin avulla. Esittelemme myös kaksi tietokoneavusteista algoritmiä, brute forcen ja geeniperimä-algoritmin, joiden avulla tietokoneet pystyvät ratkaisemaan haastavia sudokuja sekunneissa.

7.1 James Crook pencil and paper algoritmi

James Crook:in algoritmi perustuu neljään eri vaiheeseen. Ensin sudokusta etsitään määritelmän 2.10 mukaiset pakolliset numerot. Sitten merkitään jokaiseen sudokun soluun kaikki määritelmän 2.10 mukaiset kandidaatit, eli mahdolliset numerot. Seuraavaksi etsitään määritelmän 7.1 mukaiset ennakoivat joukot, joiden avulla pystytään vähentämään solujen kandidaattien lukumääriä, jolloin löytyy lisää pakollisia numeroita. Ennakoivia joukkoja etsitään kunnes niitä ei enää löydy. Kun ennakoivia joukkoja ei enää löydy, niin sudoku on ratkaistu tai ollaan päädytty tilanteeseen, jossa joudutaan tekemään määritelmän 7.5 mukainen sattumanvarainen valinta. Mikäli sattumanvarainen valinta on oikein, niin sudoku ratkeaa tai päädytään tilanteeseen, jossa joutuu tekemään uuden sattumanvaraisen valinnan. Mikäli sattumanvarainen valinta on ollut väärä, tiedetään ettei kyseiseen soluun tule ainakaan sattumanvaraisesti valittu luku. Tämän tiedon avulla sudoku voi ratketa tai tehdään taas uusi sattumanvarainen valinta. Tätä jatketaan kunnes sudoku ratkeaa.

Määritelmä 7.1. *Ennakoiva joukko* X (eng. preemptive set) koostuu joukon $\{1, 2, ..., 9\}$ alkioista ja sen koko m on $2 \leq m \leq 9$. Ainoastaan ennakoivan joukon X alkiot voivat olla ennakoivaan joukkoon kuuluvien solujen kandidaatteja. Ennakoivaa joukkoa X merkitään

$$X = \{\{n_1, n_2, ..., n_m\}, \{c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), ..., c(i_m, j_m)\}\},$$

missä $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ on ennakoivan joukon X lukujen joukko ja $\{c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), ..., c(i_m, j_m)\}$ on solujen joukko, johon ennakoivan joukon numerot $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ tulevat.[4]

On tärkeää huomata, että ennakoivan joukon X solujen joukon $\{c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), ..., c(i_m, j_m)\}$ alkioiden kandidaatteja ovat ainoastaan joukko $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ tai jokin joukon $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ osajoukko.

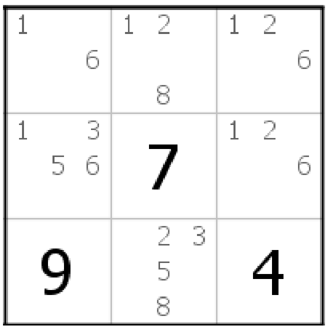
Määritelmä 7.2. *Ennakoivan joukon alue* (eng. Range of a preemptive set) on rivi, sarake tai laatikko, jossa kaikki ennakoivan joukon X solut sijaitsevat. Kun $m = 2$ tai $m = 3$ voi ennakoivan joukon alue olla osa riviä ja laatikkoa tai saraketta ja laatikkoa, sillä ennakoivan joukon kaksi tai kolme solua voivat sijaita sekä samassa rivissä/sarakkeessa, että laatikossa.[4]

Lause 7.3. *Olkoon X ennakoiva joukko. Tällöin mikään ennakoivaan joukkoon kuuluva numero $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ ei voi tulla soluun, joka ei kuuluisi ennakoivan joukon alueeseen.*

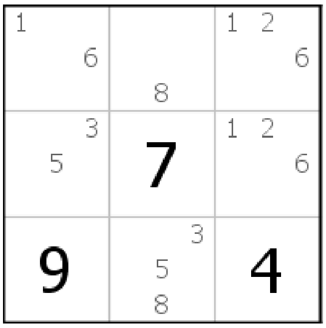
Todistus. Jos valitaan jokin numero ennakoivasta joukosta X ja se sijoitetaan johonkin soluun, joka ei kuulu ennakoivan joukon alueeseen, niin ennakoivan joukon numeroiden lukumäärä on tällöin $m-1$ ja ennakoivan joukon alueessa on yhä m määrä tyhjiä soluja. Tällöin jokin ennakoivan joukon soluista jää täyttämättä eikä sudokua saada ratkaistua. Täten kaikki ennakoivaan joukkoon X kuuluvat numerot voidaan poistaa kaikista niistä soluista, jotka eivät kuulu ennakoivan joukon alueeseen. [4] □

Ennakoivia joukkoja kutsutaan usein *alastomiksi* (eng. naked) joukoiksi. Kun ennakoivan joukon avulla sen alueen ulkopuolisista soluista poistetaan kandidaatteja löytyy uusia ennakoivia joukkoja. Tällaisia joukkoja kutsutaan usein *piilotetuiksi* (eng. hidden) joukoiksi.

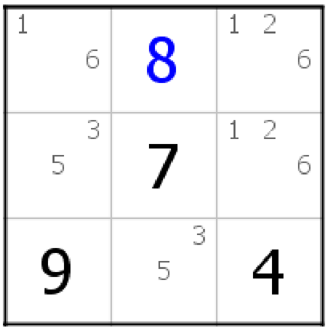
Esimerkki 7.4. Sudokun kolmas laatikko L_3 on seuraava:



Havaitaan ennakoiva joukko $\{\{1, 2, 6\}, \{c(1, 7), c(1, 9), c(2, 9)\}\}$, jonka avulla numerot 1,2 ja 6 voidaan pyyhkiä kaikkien niiden solujen kandidaateista, jotka eivät kuulu ennakoivan joukon alueeseen. Päästään seuraavaan tilanteeseen:



Soluun $c(1,8)$ on jäänyt vain yksi kandidaatti, joten sen on tultava soluun. Kun soluun $c(1,8)$ sijoitetaan numero 8 se samalla poistaa numeron 8 solun $c(3,8)$ kandidaateista. Havaitaan uusi ennakoiva joukko $\{\{3,5\},\{c(2,7),c(3,8)\}\}$. Päädytään tilanteeseen:



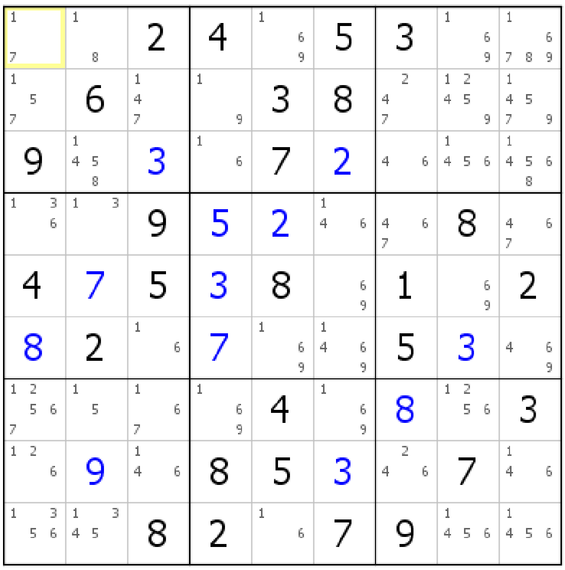
Ennakoivien joukkojen etsimistä jatketaan, kunnes niitä ei enää löydy. Suurin osa aikakausi- ja sanomalehdistä löytyvistä sudokuista ratkeaa pelkästään etsimällä pakolliset numerot ja ennakoivat joukot. Helpoissa sudokuissa ei edes tarvita ennakoivia joukkoja. Haastavissa ja harrastelijoille suunnatuissa sudokuissa kuitenkin usein päädytään tilanteeseen, jossa kaikki ennakoivat joukot on jo löydetty, mutta sudoku ei ole vielä ratkennut. Tällöin joudutaan tekemään sattumanvarainen valinta.[4]

Määritelmä 7.5. Kun ennakoivia joukkoja ei enää löydy, mutta sudoku ei ole vielä ratkennut, on tehtävä *sattumanvarainen valinta*. Sattumanvaraisessa valinnassa valitaan jokin solu ja siihen sijoitetaan yksi sen kandidaateista. Tämän jälkeen algoritmia jatketaan, eli merkitään valinnan avulla esiin tulleet pakolliset numerot ja etsitään ennakoivia joukkoja.

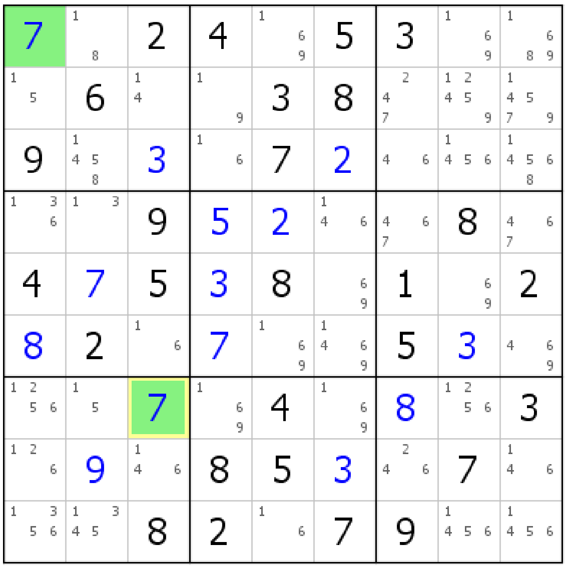
Sattumanvaraisesta valinnasta lähtien merkitään kaikki merkinnät eri värisellä kynällä. Tämä siksi, että sattumanvarainen valinta voi osoittautua vääräksi jos päädytään tilanteeseen, jossa sudokun säännöt eivät toteudu. Tällöin kaikki sattumanvaraisen valinnan jälkeen tehdyt merkinnät pitää pyyhkiä pois. Työ ei kuitenkaan mennyt hukkaan, sillä nyt tiedetään, että sattumanvarainen valinta oli väärä, eli soluun ei ainakaan tule valittua numeroa. Juurikin tämän syyn takia Crooke suosittelee, että sattumanvarainen valinta tehdään soluun, jossa on mahdollisimman vähän kandidaatteja. Mikäli kandidaatteja on vain kaksi ja valinta sattuu osumaan väärään kandidaattiin, niin soluun on jäljellä vain yksi kandidaatti josta tulee pakollinen numero ja sudokussa päästään eteenpäin. [4]

Haastavammissa sudokuissa usein yksi sattumanvarainen valinta ei riitä, vaan niitä joutuu tekemään useita. Joka kerta kun joutuu tekemään sattumanvaraisen valinnan on syytä vaihtaa kynän väriä, jotta tietää mistä alkaa aina uusi ketju.

Esimerkki 7.6. Alla oleva sudoku on vaikeustasoltaan vaikea. Sudokun pakolliset numerot ja kandidaatit on merkitty, mutta sudoku ei ole ratkennut. Joudutaan tekemään sattumanvarainen valinta.

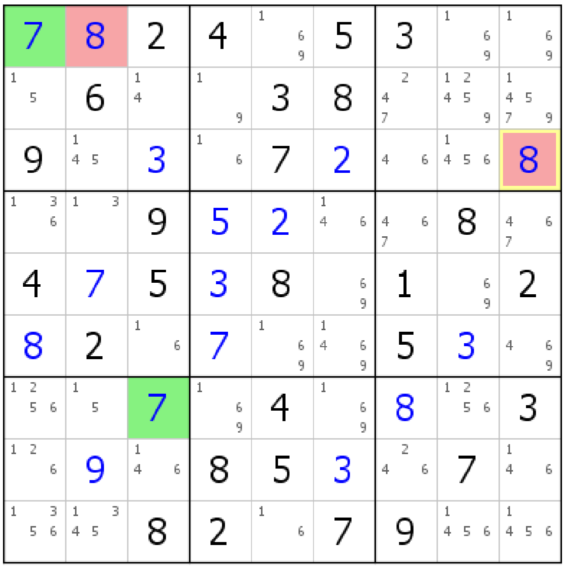


Tehdään sattumanvarainen valinta soluun $c(1,1)$. Solulla on vain kaksi kandidaattia, jolloin väärälläkin valinnalla päästään sudokussa eteenpäin. Valitaan soluun numero 7 ja aloitetaan tästä uusi ketju. Merkitään tätä kerjua vihreällä värillä. Merkitään sattumanvaraisen valinnan avulla saadut pakolliset numerot myös vihreällä.

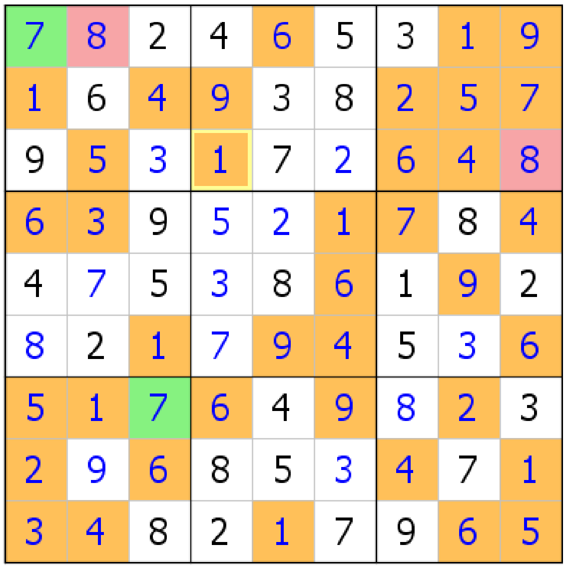


Päädytään tilanteeseen, jossa joudumme tekemään uuden sattumanvaraisen valinnan. Tässä vaiheessa emme vielä tiedä oliko ensimmäinen sattumanvarainen valinta oikein vai väärin. Tehdään uusi sattumanvarainen valinta soluun $c(1, 2)$. Solulla on vain kaksi kandidaattia, ja näistä valitaan numero 8. Aloitetaan uusi ketju ja merkitään tätä ketjua punaisella. Merkitään sattumanvaraisen valinnan avulla saadut pakolliset numerot myös punaisella.

Emme vieläkään tiedä oliko alkuperäinen sattumanvarainen valinta oikea, joten huonoimmassa tapauksessa joudumme vielä pyyhkimään kaikki tähän asti tekemämme merkinnät. On hyvä huomata, että mikäli päädymme tilanteeseen jossa sudokun säännöt eivät täyty, niin emme voi sanoa alkuperäisen valinnan olleen väärä. Tiedämme vain, että punaisella merkitty ketju on virheellinen. Mikäli päätyisimme tällaiseen tilanteeseen, pyyhkisimme punaiset merkinnät pois ja kokeilisimme soluun $c(1, 2)$ sen toista kandidaattia, numeroa 1.



Sudoku ei ole vielä ratkennut, joten tehdään kolmas sattumanvarainen valinta. Sijoitetaan soluun $c(3,4)$ numero 1. Merkitään tätä ketjua oranssilla.



Havaitaan, että sudoku ratkesi näillä kolmella sattumanvaraisella valinnalla, joten valinnat osuivat oikeaan kandidaattiin. Todennäköisyys valita oikea kandidaatti on sitä suurempi mitä vähemmän kandidaatteja on. Myös tämän syyn takia, kannattaa aina valita solu, jolla on mahdollisimman vähän kandidaatteja sattumanvaraiseen valintaan.

7.2 Brute force -algoritmi

Brute force -algoritmi tunnetaan kaikkein alkukantaisimpana algoritmina. Brute force -algoritmi nimensä mukaisesti kokeilee kaikkia mahdollisia ratkaisuvaihtoehtoja kunnes se löytää ratkaisun. Se löytää aina ratkaisun mikäli sellainen on olemassa, mutta ratkaisun löytäminen voi kestää kauan. [2]

Sudoku on mahdollista ratkaista Brute force -algoritmilla. Algoritmi valitsee ensimmäisen tyhjänä olevan solun ja asettaa sinne jonkin sen kandidaateista sattumanvaraisesti. Algoritmi valitsee seuraavan solun ja valitsee sinne taas sattumanvaraisesti jonkin sen kandidaateista. Tätä jatketaan kunnes törmätään tilanteeseen, jossa sudokun säännöt eivät toteudu. Algoritmi ottaa tämän kokoonpanon muistiin, eikä enää tulevaisuudessa kokeile samaa kokoonpanoa, sillä se ei johda ratkaisuun. Tämän jälkeen aloitetaan alusta tekemällä eri sattumanvaraiset valinnat. Tätä jatketaan kunnes löydetään sudokulle ratkaisu. Brute force -algoritmilla voidaan löytää kaikki mahdolliset ratkaisut ongelmaan, mikäli niitä on useampi kuin yksi.

Brute force -menetelmä on hidas, mutta hienosäätämällä algoritmia siitä saadaan huomattavasti nopeampi. Sudokua ratkaistaessa on järkevintä aloittaa Brute force -algoritmi sellaisesta solusta, jossa on mahdollisimman vähän kandidaatteja. Tällöin on paremmat mahdollisuudet valita solun kandidaateista oikea numero. Toinen tapa nopeuttaa Brute force -algoritmia on niin sanotulla takaisinpaluu (eng. backtrack) ominaisuudella. Kun algoritmi saapuu tilanteeseen, missä sudokun säännöt eivät toteudu, se voi palata takaisin edelliseen soluun, poistaen sudokun sääntöjä rikkovan solun numeron ja sijoittaa soluun jonkin toisen kandidaatin. Mikäli yhtään sopivaa numeroa soluun ei ole, algoritmi palaa taas yhden solun verran takaisin päin ja kokeilee jotain toista solun kandidaattia kyseiseen soluun.

Crooken algoritmin lopussa käytetään Brute force -menetelmää backtrack-ominaisuudella. Algoritmi löytää ratkaisun sitä nopeammin mitä vähemmän kandidaatteja on jäljellä soluissa. Tietokoneiden laskentateho on paljon suurempi kuin ihmisen, joten Brute force -algoritmi hienosäädettynä on huomattavasti nopeampi kuin Crooken kynällä ja paperilla käytettävä ratkaisualgoritmi.

7.3 Geeniperimä-algoritmi

Geeniperimä-algoritmit ovat algoritmeja, jotka matkivat luonnonvalintaa, eli evoluutioprosessia, jossa periytyvät hyödylliset ominaisuudet runsastuvat ja haitalliset harvenevat sukupolvien aikana. Algoritmin aluksi luodaan satunnainen alkupopulaatio. Alkupopulaatiosta aletaan kehittämään uusia sukupolvia yhdistämällä kromosomeja eli mahdollisia ratkaisuja. Luonnonvalinnan tapaan, parhaimmat, lähimpänä ratkaisua olevat kromosomit lisääntyvät todennäköisemmin, kuin huonot kaukana ratkaisusta olevat. Kromosomeille tapahtuu myös mutaatiota, joka tuo uusiin sukupolviin kaivattua variaatiota. Mutaatio on tärkeässä asemassa, sillä alkupopulaatiosta kromosomeja yhdistelemällä ei aina ole mahdollista saada ongelmaan ratkaisua. Uusia sukupolvia luodaan kunnes löydetään riittävän hyvä ratkaisu.

Sudokua ratkaistaessa Geeniperimä-algoritmilla kromosomit ovat sudokuruudukkoja. Jokainen kromosomi koostuu 81 geenistä eli sudokun solusta. Alkupopulaationa toimii jokin lukumäärä sattumanvaraisesti luotuja sudokuruudukoita. Kaikissa kromosomeissa kuitenkin jo valmiiksi annetut numerot eli vihjeet ovat paikoillaan. Sattumanvaraisesti luoduissa kromosomeissa otetaan huomioon sudokun rivisääntö, niin että jokaiselle riville tulee alkiot 1-9 täsmälleen kerran. Näin saadaan alkupopulaatiosta mahdollisimman hyvä. [8]

"Hyvyysfunktio"(engl. fitness) on tärkeä osa geneettistä algoritmia, koska se määrittää kunkin kromosomin arvon [13]. Sudoku ruudukolle hyvyysfunktion arvo on riippuvainen sudokun sääntöjen rikkeiden lukumäärästä. Mitä ennemmän rikkeitä on, sitä pienempi arvo hyvyysfunktiolla on. Sudokun sääntörikkeitä ovat kaksi samaa numeroa rivillä, sarakkeella tai laatikossa. Vastaavasti sääntörikkeiksi voidaan määritellä jonkin numeron puuttuminen riviltä, sarakkeelta tai laatikosta.

Seuraavaksi kromosomit valitaan pariutumista varten. Todennäköisyys tulla valituksi on riippuvainen hyvyysfunktion arvosta. Mitä suurempi hyvyysfunktion arvo, sitä todennäköisemmin kromosomi valitaan pariutumiseen [13]. Olkoon alkupopulaatiossa 3 kromosomia, joiden hyvyysfunktion arvot ovat 1,4 ja 10. Koko generaation hyvyys on $1+4+10 = 15$. Todennäköisyydet tulla valituksi ovat täten $1/15, 4/15, 10/15$. Painottamalla todennäköisyydet hyvyysfunktion arvoilla taataan parhaiden geenien säilyminen tulevissa sukupolvissa.

Pariutumisessa molemmilta vanhemmilta otetaan geenejä ja niiden avulla luodaan lapsi, joka kuuluu uuteen sukupolveen [12]. Geenien valinta voidaan tehdä usealla eri tavalla. Järkevintä on kuitenkin säilyttää jokaisella rivillä olevien numeroiden lukumäärä, jotta sääntörikkomukset pysyvät mahdollisimman vähäisinä. Geenit voidaan valita lapselle riveittäin, jolloin molempien vanhempien riveillä on 50% mahdollisuus tulla valituksi. Tällä tavalla säilytämme jokaisella rivillä alkiot 1-9. Toinen tapa valita lapsen geenit on nipuittain. Tällöin sudokun kolme nippua valitaan aina niputtain toiselta vanhemmalta 50% todennäköisyydellä. Tällä pariutumistavalla on mahdollista säilöä laatikoita, joissa on vähän sääntörikkomuksia. Yleensä algoritmissa käytetään useita erilaisia pariutumismekanismeja, jotka säilövät kromosomien erilaisia haluttuja ominaisuuksia. Uuden sukupolven kromosomeja voidaan tehdä alkupopulaatiota enemmän, jonka jälkeen uudesta sukupolvesta karsitaan hyvyysfunktion arvoltaan heikoimmat yksilöt pois. [8]

Pariutumisen lisäksi uuden sukupolven kromosomeille on mahdollista tapahtua mutaatiota. Mutaatiosta on erilaisia versioita ja yleensä algoritmissa käytetään useaa erilaista mutaatiota variaation lisäämiseksi. Perusideana on vaihtaa kromosomin geenien paikkoja. Geenien paikkojen vaihdossa otetaan kuitenkin huomioon sudokun rivisääntö ja jo valmiiksi annetut vihjeet. Mutaatiota voidaan tehdä esimerkiksi vain rivien sisällä, niin että kahden tai useamman geenin paikkaa vaihdetaan keskenään. Tällöin jokaisella rivillä säilyy numerot 1-9. [12]

Algoritmi päättyy, kun ratkaisu sudokulle on löydetty. On kuitenkin mahdollista, että algoritmi jää jumiin, eikä kykene löytämään ratkaisua. Tällöin populaation hyvyysfunktion arvo on niin heikko, ettei algoritmi pääse lähemmäksi oikeaa ratkaisua. Tällöin voidaan luoda kokonaan uusi alkupopulaatio ja aloittaa algoritmi alusta, tai karsia esimerkiksi puolet heikoimmista kromosomeista pois ja lisätä sama lukumäärä uusia kromosomeja populaatioon. Myös pariutumistapaa, mutaatiota tai alkupopulaation kokoa voi muuttaa, mikäli algoritmi ei löydä ratkaisua.

Lähdeluettelo

[1] Arnold, E. Field, R. Lucas, S. Taalman, L : *Minimal Complete Shidoku Symmetry Groups*, Cornell University, Virginia (2013).

[2] Chatterjee, S. Paladhi, S. Chakraborty. R : *A Comparative Study On The Performance Characteristics Of Sudoku Solving Algorithms*, Engineering Technology college West Bengal, India (2014).

[3] Colbourn, C, J. Dinitz, J, H : *Handbook of Combinatorial Designs, Second edition*, New York (2007).

[4] Crook, J : *A Pencil-and-Paper Algorithm for Solving Sudoku Puzzles*, Notices of the AMS 56(4) 460-468, (2009).

[5] Schaab, B : *Finding Bounds for the Number of Sudoku*, (2008).

[6] Felgenhauer, B. Jarvis, A : *Mathematics of Sudoku I*, Sheffield, England (2006).

[7] Herzberg, A, M. Murty, M, R : *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*, Notices of the AMS 54(6) 708-717, (2007).

[8] Huges, R. Yampolskiy, R : *Solving Sudoku Puzzles with Wisdom of Artificial Crowds*, University of Louisville, Kentucky (2012).

[9] Jones, S, K : *On Properties of Sudoku and Similar Combinatorial Structures*, University of south Wales, Newport, Wales (2006).

[10] Jones, S, K. Perkins, S. Roach, P, A: *On the Number of 6 x 6 Sudoku Grids*, University of Glamorgan, Pontypridd, Wales (2012).

[11] Jones, S, K, Perkins, S. Roach, P, A : *The Structure of Reduced Sudoku Grids and the Sudoku Symmetry Group*, University of Glamorgan, Pontypridd, Wales (2012).

[12] Koljonen, J. Mantere, T : *Solving and Rating Sudoku Puzzles with Genetic Algorithms*, Vaasan yliopisto (2006).

[13] Koljonen, J. Mantere, T : *Sudoku Solving with Cultural Swarms*, Vaasan yliopisto (2008).

[14] La Bonte, A : *The Mathematics behind Sudoku and How to Create Magic Squares*, University of Maine, Maine (2016).

[15] Rosenhouse, J. Taalman, L : *Taking Sudoku Seriously*, Oxford University, England (2011).

[16] Russel, E. Jarvis, A : *Mathematics of Sudoku II*, Sheffield, England (2006).

[17] *http://www.sudocue.net/guide.php*.

[18] $https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/book/section06.01.html$.